УДК 517.5

В.Ф. Бабенко, И. Н. Литвинюк, Н.В. Парфинович

Днепропетровский госуниверситет

О наилучших несимметричных L_1-приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные

Найдены точные значения несимметричных L_1-приближений классов W_1^r периодических функций сплайнами $s \in S_{2n,r-1}$ и $s \in S_{2n,r}$ ($S_{2n,r}$ - множество 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r, дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n$, $k \in Z$) такими, что $\bigvee_0^{2\pi} s^{(r-1)} \le 1$ и $\|s^{(r)}\| \le 1$ соответственно при четных r, и как следствие получены точные значения для соответствующих наилучших односторонних приближений.

Пусть L_p $(1 \le p \le \infty)$ - пространства 2π-периодических функций $f: R \to R$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p[0,2\pi]}$. Если α и β - положительные числа, то для любой функции $f \in L_p$ положим

$$\|f\|_{p;\alpha,\beta} = \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_p,$$

где $f_\pm(t) = \max\{\pm f(t), 0\}$.

Наилучшим (α,β)- приближением функции $f \in L_p$ множеством $H \subset L_p$ в метрике L_p будем называть величину

$$E(f,H)_{p;\alpha,\beta} = \inf_{u \in H} \|f - u\|_{p;\alpha,\beta}. \qquad (1)$$

Если еще $M \subset L_p$ - некоторый класс функций, то величина

$$E(M,H)_{p;\alpha,\beta} = \sup_{f \in M} E(f,H)_{p;\alpha,\beta} \qquad (2)$$

называется наилучшим (α,β)- приближением класса M множеством H в метрике L_p.

При $a = b = 1$ величины (1) и (2) совпадают с обычным наилучшим L_p- приближением функции f (обозначение $E(f,H)_p$) и класса M (обозначение $E(M,H)_p$) соответственно.

Кроме того [4, теорема 1.4.10], при весьма общих предположениях

$$\lim_{\beta\to\infty} E(f,H)_{p;1,\beta} = E^{+}(f,H)_p,$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} E(f,H)_{p;\alpha,1} = E^{-}(f,H)_p$$

и

$$\lim_{\beta\to\infty} E(M,H)_{p;1,\beta} = E^{+}(M,H)_p,$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} E(f,H)_{p;\alpha,1} = E^{-}(M,H)_p,$$

где $E^{\pm}(f,H)_p$ и $E^{\pm}(M,H)_p$ - наилучшие приближения снизу (+) и сверху (-) функции f и класса M соответственно множеством H в метрике L_p.

Через $W^r_{p;\alpha,\beta}$ $(r\in N)$ будем обозначать класс функций $f\in L_1$, имеющих локально абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}$ $(f^{(r-1)}\in AC_{loc})$ и таких, что $\|f^{(r)}\|_{p;\alpha,\beta}\le 1$, а через W^r_V - класс 2π-периодических функций f таких, что $f^{(r-1)}\in AC_{loc}$ и $\bigvee\limits_0^{2\pi}\left(f^r(t)\right)\le 1$. Везде ниже вместо $W^r_{p;1,1}$ мы будем писать W^r_p.

Множество 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r, дефекта 1, с узлами в точках $k\pi/n$, $k,n\in Z$, $n>0$, будем обозначать через

В данной заметке мы найдем точные значения величин $E(W^r_1, S_{2n,r}\cap W^r_1)_{1;\alpha,\beta}$ и $E(W^r_1, S_{2n,r-1}\cap W^{r-1}_V)_{1;\alpha,\beta}$ при четных r и любых $\alpha,\beta>0$ и как следствие получим соответствующие результаты для наилучших односторонних приближений.

Отметим, что в работах [1], [2] были найдены точные значения величин $E(W^r_1, S_{2n,r}\cap W^r_1)_1$ и $E(W^r_1, S_{2n,r-1}\cap W^{r-1}_V)_1$ соответственно при всех $r\in N$.

Пусть $\varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta;t)$ $(\alpha>0,\beta>0)$ - $\frac{2\pi}{\lambda}$-периодический интеграл порядка r с нулевым средним значением на периоде от четной $\frac{2\pi}{\lambda}$-периодической функции $\varphi_{\lambda,0}(\alpha,\beta;t)$, которая для $t\in[0,\pi/\lambda]$ определяется следующим образом:

$$\varphi_{\lambda,0}(\alpha,\beta;t)=\begin{cases}\alpha, & 0\le t<\pi\beta/(\alpha\lambda+\beta\lambda),\\ \beta, & \pi\beta/(\alpha\lambda+\beta\lambda)\le t<\pi/\lambda\end{cases}$$

Рассмотрим сужение функций $\varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta;x)_+$ и $\varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta;\ \frac{\pi}{\lambda}-x)_-$ на $[0,\pi/\lambda]$ и определим в соответствии с этим на $[0,\pi/\lambda]$ следующие функции :

$$\Phi_{\lambda,r}(\alpha,\beta;x)=\varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta;x)_+ + \varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta;\ \frac{\pi}{\lambda}-x)_-$$

и

$$R_{\lambda,r}(\alpha,\beta,x)=r(\varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta)_+,x)+r(\varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta)_-,\ \frac{\pi}{\lambda}-x),$$

где $r(f;x)$ - невозрастающая перестановка сужения функции f на $[0,\pi/\lambda]$ [4, с.111].

В данной работе доказана следующая

Теорема . Для любого $n=1,2,\dots$ и $r=2,4,\dots$

1. $$E(W_1^r,S_{2n,r-1}\cap W_V^{r-1})_{1;\alpha,\beta}=\frac{1}{2}\left[\Phi_{1,r}(\alpha,\beta;t_{max})-\Phi_{1,r}\left(\alpha,\beta;t_{max}+\frac{\pi}{2n}\right)\right].$$

2. $$E(W_1^r,S_{2n,r}\cap W_1^r)_{1;\alpha,\beta}=\frac{1}{2}\left[R_{1,r}(\alpha,\beta;t_{max})-\frac{n}{\pi}\int\limits_{t_{max}}^{t_{max}+\frac{\pi}{n}}R_{1,r}(\alpha,\beta;t)dt\right].$$

Здесь t_{max} таково, что $\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;t_{max})=\max\limits_t\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;t)$.

Доказательство. Для сокращения записей положим

$$C_n=\left\{c=(c_1,c_2,\dots,c_{2n})\in R^{2n}:\sum_{k=1}^{2n}c_k=0,\ \sum_{k=1}^{2n}|c_k|\le 1\right\}.$$

Докажем сначала утверждение 1. Любой сплайн $u(t)\in S_{2n,r-1}$ можно единственным образом представить в виде [3, предложение 1.1.5]

$$u(t)=c+\sum_{k=1}^{2n}c_kB_r(t-k\pi/n), \qquad (3)$$

где

$$B_r(t)=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}m^{-r}\cos(mt-\pi r/2)\ -$$

ядро Бернулли, $c_1,c_2,\dots,c_{2n}\in R$, $\sum\limits_{k=1}^{2n}c_k=0$. При этом условие $u(t)\in W_V^{r-1}\cap S_{2n,r-1}$ эквивалентно условию $\sum\limits_{k=1}^{2n}|c_k|\le 1$.

В силу теоремы двойственности для наилучших (α,β)-приближений выпуклым множеством в метрике L_p [4,предложение 1.4.9], учитывая (3) и то обстоятельство, что множество $W_V^{r-1} \cap S_{2n,r-1}$ содержит константы, и действуя, как при доказательстве теоремы из [2], получим

$$E := E(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap W_V^{r-1})_{1;\alpha,\beta} =$$

$$= \sup_{f \in W_1^r} \sup_{\left\{\substack{g(t) \in L_\infty \\ \|g\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1 \\ g \perp 1}\right\}} \left\{ \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt - \sup_{u(t) \in S_{2n,r-1} \cap W_V^{r-1}} \int_0^{2\pi} u(t)g(t)dt \right\} =$$

$$= \sup_{g \in W^r_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}} \left\{ E(g)_\infty - \sup_{c \in C_n} \sum_{k=1}^{2n} c_k g(k\pi/n) \right\}, \qquad (4)$$

где $E(g)_\infty$ - наилучшее равномерное приближение функции g подпространством констант.

Хорошо известно, что для любой функции $g \in W^r_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}$ $E(g)_\infty \le E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta))_\infty$. При подходящем $\lambda \ge 1$ будем иметь

$$E(g)_\infty = E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta))_\infty. \qquad (5)$$

Если $\lambda \ge n$, то [4, теорема 5.4.13]

$$E(g)_\infty - \sup_{c \in C_n} \sum_{k=1}^{2n} c_k g(k\pi/n) \le E(\varphi_{n,r}(\alpha,\beta))_\infty = E(W_1^r, S_{2n,r-1})_{1;\alpha,\beta}.$$

Поэтому внешнюю точную верхнюю грань можно брать только по таким $g(t)$, для которых в (5) $\lambda \le n$.

Согласно определению, функция $\varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta;t)$ при четных r будет достигать экстремума в точках $t = 0$ и $t = \pi/\lambda$. Для определенности будем считать, что $t_{max}=0$.

Пусть t'_{max} и t'_{min} - точки максимума и минимума функции $g(t)$. Очевидно, что найдутся $k_1, k_2 \in Z$ такие, что

$$\left| t'_{max} - \frac{k_1\pi}{n} \right| \le \frac{\pi}{2n}, \qquad \left| t'_{min} - \frac{k_2\pi}{n} \right| \le \frac{\pi}{2n}.$$

Учитывая (5), с помощью теоремы сравнения в несимметричном случае [4, теорема 3.3.9], получим:

$$g\left(\frac{k_1\pi}{n}\right) \ge \varphi_{\lambda,r}\left(\alpha,\beta;\frac{\pi}{2n}\right),$$

$$g\left(\frac{k_2\pi}{n}\right) \le \varphi_{\lambda,r}\left(\alpha,\beta;\frac{\pi}{\lambda}+\frac{\pi}{2n}\right).$$

Положив $c_{k_1} = \frac{1}{2}$, $c_{k_2} = -\frac{1}{2}$, $c_k = 0$, если $k \ne k_1, k_2$, из (4) будем иметь

$$E \le \sup_{1\le\lambda\le n}\left\{\frac{1}{2}\left(\varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta;0) - \varphi_{\lambda,r}\left(\alpha,\beta;\frac{\pi}{\lambda}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(g\left(\frac{k_1\pi}{\lambda}\right) - g\left(\frac{k_2\pi}{\lambda}\right)\right)\right\} \le$$

$$\le \sup_{1\le\lambda\le n}\left\{\frac{1}{2}\left(\varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta;0) - \varphi_{\lambda,r}\left(\alpha,\beta;\frac{\pi}{\lambda}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\varphi_{\lambda,r}\left(\alpha,\beta;\frac{\pi}{2n}\right) - \varphi_{\lambda,r}\left(\alpha,\beta;\frac{\pi}{\lambda}+\frac{\pi}{2n}\right)\right)\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sup_{1\le\lambda\le n}\left[\varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta;0) - \varphi_{\lambda,r}\left(\alpha,\beta;\frac{\pi}{2n}\right)\right] + \frac{1}{2}\sup_{1\le\lambda\le n}\left[\varphi_{\lambda,r}\left(\alpha,\beta;\frac{\pi}{\lambda}+\frac{\pi}{2n}\right) - \varphi_{\lambda,r}\left(\alpha,\beta;\frac{\pi}{\lambda}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sup_{1\le\lambda\le n} F(\lambda) + \frac{1}{2}\sup_{1\le\lambda\le n} G(\lambda).$$

Исследуя на экстремум функции $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ на промежутке $[1, n]$, приходим к выводу о том, что

$$\sup_{1\le\lambda\le n} F(\lambda) = F(1) = \varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0) - \varphi_{1,r}\left(\alpha,\beta;\frac{\pi}{2n}\right),$$

$$\sup_{1\le\lambda\le n} G(\lambda) = G(1) = \varphi_{1,r}\left(\alpha,\beta;\pi+\frac{\pi}{2n}\right) - \varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi).$$

Итак,

$$E \le \frac{1}{2}\left\{\left[\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0) - \varphi_{1,r}\left(\alpha,\beta;\frac{\pi}{2n}\right)\right] + \left[\varphi_{1,r}\left(\alpha,\beta;\pi+\frac{\pi}{2n}\right) - \varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi)\right]\right\}. \quad (6)$$

С другой стороны, учитывая равенство (3), общий вид линейного функционала, действующего в конечномерном пространстве, а также соотношение двойственности [5, п. 2.2.1], будем иметь

$$E \ge \sup_{a\in R}\left\{E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta))_\infty - \sup_{c\in C_n}\sum_{k=1}^{2n} c_k\varphi_{1,r}(a+k\pi/n)\right\} =$$

$$= E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta))_\infty - \inf_{a\in R}\inf_{\lambda\in R}\max_k\left|\varphi_{1,r}\left(\alpha,\beta;a+\frac{k\pi}{n}\right) - \lambda\right| \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\left\{\left[\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0) - \varphi_{1,r}\left(\alpha,\beta;\frac{\pi}{2n}\right)\right] + \left[\varphi_{1,r}\left(\alpha,\beta;\pi+\frac{\pi}{2n}\right) - \varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi)\right]\right\}. (7)$$

Вспоминая представление функции $\Phi_{\lambda,r}(\alpha,\beta;x)$ на $[0,\pi/\lambda]$, на основании (6) и (7), с учетом четности $\varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta;t)$ заключаем, что

$$E=\frac{1}{2}\left[\Phi_{1,r}(\alpha,\beta;t_{\max})-\Phi_{1,r}\left(\alpha,\beta;t_{\max}+\frac{\pi}{2n}\right)\right].$$

Первое утверждение теоремы доказано. Перейдем к доказательству утверждения 2.

Аналогично доказательству (4) получим

$$E=\sup_{g\in W^r_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}}\left\{E(g)_\infty-\sup_{u\in W^r_1\cap S_{2n,r}}\int_0^{2\pi}u^{(r)}(t)g(t)dt\right\}. \qquad (8)$$

Функция $u^{(r)}$ постоянна на каждом из интервалов (x_k,x_{k+1}), где $x_k=\frac{k\pi}{n}$. Если c_k - ее значения на (x_k,x_{k+1}), то $\sum_{k=1}^{2n}c_k=0$, и, если $u\in S_{2n,r}\cap W^r_1$, то $\sum_{k=1}^{2n}|c_k|\le\frac{n}{\pi}$.

Поэтому из (8) выводим

$$E=\sup_{g\in W^r_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}}\left\{E(g)_\infty-\frac{n}{\pi}\sup_{c\in C_n}\sum_{k=1}^{2n}c_k\int_{x_k}^{x_{k+1}}g(t)dt\right\}=$$

$$=\sup_{g\in W^r_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}}\left\{E(g)_\infty-\frac{n}{\pi}\inf_{\lambda\in R}\max_k\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}g(t)dt-\lambda\right|\right\}. \qquad (9)$$

Точную верхнюю грань в последнем выражении можно брать только по таким $g\in W^r_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}$, для которых

$$\inf_{\lambda\in R}\max_k\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}g(t)dt-\lambda\right|=\max_k\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}g(t)dt\right|.$$

Кроме того, для любой функции $g\in W^r_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}$ найдется $\lambda\ge 1$ такое, что

$$E(g)_\infty=E(\varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta))_\infty.$$

Очевидно, что $E\ge E(W^r_1,S_{2n,r})_{1;\alpha,\beta}=E(\varphi_{n,r}(\alpha,\beta))_\infty$ [4, теорема 5.4.13]. Поэтому

$$E=\sup_{1\le\lambda\le n}E(\varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta))_\infty-\frac{n}{\pi}\inf_{E(g)_\infty=E(\varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta))_\infty}\max_k\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}g(t)dt\right|.$$

Используя теорему сравнения производных для несимметричного случая [4, теорема 3.3.9], устанавливаем, что для любой $g \in W^r_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}$, такой что $E(g)_\infty = E(\varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta))_\infty$, будет

$$\max_k \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(t)dt \right| \geq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta;t)dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\frac{\pi}{\lambda}+\frac{\pi}{n}} \left|\varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta;t)\right| dt .$$

Теперь из (9) можем получить

$$E \leq \frac{1}{2} \sup_{1\leq\lambda\leq n} F(\lambda) + \frac{1}{2} \sup_{1\leq\lambda\leq n} G(\lambda),$$

где

$$F(\lambda) = \varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta;0) - \frac{n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta;t)dt,$$

$$G(\lambda) = -\varphi_{\lambda,r}\left(\alpha,\beta;\frac{\pi}{\lambda}\right) - \frac{n}{\pi} \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\frac{\pi}{\lambda}+\frac{\pi}{n}} \left|\varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta;t)\right| dt .$$

Исследуя на экстремум функции $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ при $\lambda \in [1,n]$, получим

$$\sup_{1\leq\lambda\leq n} F(\lambda) = F(1) = \varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0) - \frac{n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \varphi_{1,r}(\alpha,\beta;t)dt,$$

$$\sup_{1\leq\lambda\leq n} G(\lambda) = G(1) = -\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi) - \frac{n}{\pi} \int_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{n}} \left|\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;t)\right| dt .$$

Таким образом,

$$E \leq \frac{1}{2} \left\{ \left[\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0) - \frac{n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \varphi_{1,r}(\alpha,\beta;t)dt \right] - \left[\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi) + \frac{n}{\pi} \int_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{n}} \left|\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;t)\right| dt \right] \right\} \quad (10)$$

С другой стороны, с учетом (9)

$$E = \sup_{\gamma\in R} \left\{ E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta))_\infty - \frac{n}{\pi} \sup_{c\in C_n} \sum_{k=1}^{2n} c_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{1,r}(\alpha,\beta;t+\gamma)dt \right\} =$$

$$= E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta))_\infty - \frac{n}{\pi} \inf_{\gamma\in R} \inf_{\lambda\in R} \max_k \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{1,r}(\alpha,\beta;t+\gamma)dt - \lambda \right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left\{\left[\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0)-\frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;t)dt\right]-\left[\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi)+\frac{n}{\pi}\int_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{n}}|\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;t)|dt\right]\right\}. \quad (11)$$

Из неравенств (10) и (11), с учетом свойств перестановок [4, с.112] и представления функции $R_{\lambda,r}(\alpha,\beta;t)$ на $[0,\pi/\lambda]$, получим

$$E=\frac{1}{2}\left[R_{1,r}(\alpha,\beta;t_{max})-\frac{n}{\pi}\int_{t_{max}}^{t_{max}+\frac{\pi}{n}}R_{1,r}(\alpha,\beta;t)dt\right].$$

Теорема доказана.

Из теоремы и предельных соотношений между наилучшими (α,β)-приближениями и наилучшими односторонними приближениями функций из L_p немедленно вытекает

Следствие. Для всех $n=1,2,\ldots$ и $r=2,4,\ldots$

$$E^{\pm}(W_V^r,S_{2n,r-1}\cap W_1^{r-1})_1=\mp\left[B_r(t_{max})-B_r(t_{min})-B_r\left(t_{max}+\frac{\pi}{2n}\right)+B_r\left(t_{min}+\frac{\pi}{2n}\right)\right]$$

$$E^{\pm}(W_1^r,S_{2n,r}\cap W_1^r)_1=\mp\left[B_r(t_{max})-B_r(t_{min})-\frac{n}{\pi}\left(\int_{t_{max}}^{t_{max}+\frac{\pi}{n}}B_r(t)dt+\int_{t_{min}}^{t_{min}+\frac{\pi}{n}}|B_r(t)|dt\right)\right].$$

Здесь

$$B_r=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}m^{-r}\cos\left(mt-\frac{\pi r}{2}\right)$$

- ядро Бернулли, а t_{max} и t_{min} таковы, что

$$B_r(t_{max})=\max_t B_r(t);\quad B_r(t_{min})=\min_t B_r(t).$$

Библиографические ссылки

1. Бабенко В.Ф. Наилучшие L_1-приближения классов W_1^r сплайнами из W_1^r // Укр. мат. журн.. 1994. Т. 46, № 10. С. 1410-1414.
2. Бабенко В.Ф. Приближения в среднем при наличии ограничений на производные приближающих функций // Вопр. анализа и приближений. К., 1989. С. 9-18.
3. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближений. М., 1984.
4. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближений. М., 1987.
5. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближений. М., 1976.

Поступила в редколлегию 29.06.98