УДК 517.5

Условия единственности элемента наилучшего несимметричного L_1-приближения для непрерывных вектор-функций с ограничениями на коэффициенты

Ю. С. Загорулько*, **М. Е. Ткаченко****, **В. Н. Трактинская*****

* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. *E-mail:yuliya.zagorulko@gmail.com*

** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. *E-mail: mtkachenko2009@ukr.net*

*** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. *E-mail: victoria-dp@yandex.ru*

Отримані необхідні і достатні умови єдиності елемента найкращого $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$- наближення з обмеженнями на коефіцієнти неперервних на метричному компакті векторнозначних функцій.

Ключові слова: **єдиність елемента найкращого несиметричного наближення з обмеженнями на коефіцієнти, векторнозначні функції.**

Получены необходимые и достаточные условия единственности наилучшего $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$-приближения с ограничениями на коэффициенты непрерывных на метрическом компакте векторнозначных функций.

Ключевые слова: **единственность элемента наилучшего несимметричного приближения с ограничениями на коэффициенты, векторнозначные функции.**

The necessary and sufficient conditions of the unicity of the best $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$-approximant with coefficient constraints for the continuous vector-valued functions on a metric compact are obtained.

Key words: **the unicity of the best nonsymmetric approximant, vector-valued functions, one-dimensional subspace.**

Пусть Q – метрически выпуклый компакт с метрикой ρ, Σ – σ-поле борелевских подмножеств Q и μ – неотрицательная, конечная, безатомная мера, положительная на любом непустом открытом подмножестве Σ.

Через $C(Q)$ обозначим пространство непрерывных функций $f : Q \to \mathbf{R}$, через $\mathbf{R}^m$ – пространство векторов $\bar{f} = (f^1, f^2, ..., f^m)$, а через $C(Q, \mathbf{R}^m)$ – пространство вектор-функций $f : Q \to \mathbf{R}^m$ с нормой

$$||\bar{f}||_{1;\bar{\alpha},\bar{\beta}} = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{Q} |f^i(x)|_{\alpha_i,\beta_i} d\mu(x),$$

где $|f(x)|_{\alpha,\beta} = \alpha f_+(x) + \beta f_-(x)$,
$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m), \bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m), \alpha_i > 0, \beta_i > 0, i = 1, 2, ..., m$,
$\bar{f} = (f^1, f^2, ..., f^m), f^i \in C(Q), i = 1, 2, ..., m$.

Через $L_\infty(Q, \mathbf{R}^m)$ обозначим пространство всех μ-измеримых существенно ограниченных функций $\bar{f}$ с нормой

$$||\bar{f}||_{\infty;\bar{\alpha},\bar{\beta}} = \sum_{j=1}^{m} \sup \mathrm{vrai}\{|f^j(x)| : x \in Q\}.$$

Пусть $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m)$, $H \subset C(Q, \mathbf{R}^m)$.

Величину

$$E(\bar{f}, H)_{1;\bar{\alpha},\bar{\beta}} = \inf\{\|\bar{f} - \bar{u}\|_{1;\bar{\alpha},\bar{\beta}} : \bar{u} \in H\} \tag{1}$$

будем называть наилучшим $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$- приближением вектор-функции $\bar{f}$ множеством H в метрике L_1, а функцию из H, реализующую точную нижнюю грань в правой части равенства (1), – элементом наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$- приближения $\bar{f}$ множеством H в метрике L_1.

Множество элементов наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$- приближения функции $\bar{f}$ множеством H обозначим через $P_H^{\bar{\alpha},\bar{\beta}}(\bar{f})$, а множество нулей функции f будем обозначать Z_f.

Пусть U – n-мерное подпространство пространства $C(Q)$ и $u_1, ..., u_n$ – базис подпространства U.

Для заданных числовых векторов $\bar{\varepsilon}_i = (\varepsilon_i^1, ..., \bar{\varepsilon}_i^m)$ и $\bar{\delta}_i = (\delta_i^1, .., \delta_i^m)$, удовлетворяющих $-\infty \le \varepsilon_i^j < \delta_i^j \le +\infty$, $i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$, положим

$$M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}) = \{\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i u_i : \bar{a}_i = (a_i^1, ..., a_i^m), \varepsilon_i^j \le a_i^j \le \delta_i^j, i = 1, ..., n, j = 1, ..., m\}.$$

Рассматривается задача единственности элемента наилучшего несимметричного приближения функций из $C(Q, \mathbf{R}^m)$ элементами множества $M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$. Задачи наилучшего приближения с ограничениями на коэффициенты изучались в [4]. В [2] были получены необходимые и достаточные условия того, что множество $M(\varepsilon, \delta)$ является множеством единственности элемента наилучшего приближения для действительнозначных функций непрерывных на компакте при $\alpha = \beta = 1$, в [6] получены аналогичные условия для векторнозначных функций при $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = \bar{1}$.

Для $\bar{u}^* = \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{a}_i^* u_i \in M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$ положим $\bar{b}_i^* = (b_i^{1*}, ..., b_i^{m*})$, где $b_i^{j*} = 1$, если $a_i^{j*} = \delta_i^j$, $b_i^{j*} = 0$, если $\varepsilon_i^j < a_i^{j*} < \delta_i^j$, $b_i^{j*} = -1$, если $a_i^{j*} = \varepsilon_i^j$, и

$$U(\bar{b}^*) = \{\sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i u_i : \bar{c}_i = (c_i^1, ..., c_i^m), c_i^j b_i^{j*} \le 0, i = 1, ..., n, j = 1, ..., m\}.$$

Из критерия элемента наилучшего несимметричного приближения [3, пр.1.3.5.] несложно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $\bar{f}\in C(Q,\boldsymbol{R}^m)\backslash M(\bar{\varepsilon},\bar{\delta})$. Следующие условия эквивалентны:*

1) элемент $\bar{u}^*=\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{a}_i^*u_i\in M(\bar{\varepsilon},\bar{\delta})$ является элементом наилучшего $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$-приближения для $\bar{f}$ множеством $M(\bar{\varepsilon},\bar{\delta})$;

2) $\exists\bar{h}=(h^1,..,h^m)\in L_\infty(Q,\boldsymbol{R}^m)$:

a) $|h^j(x)|_{1/\alpha_j,1/\beta_j}=1$, $\forall x\in Q$, $j=1,...,m$;

b) $\int\limits_Q h^j\cdot u_i d\mu\geq 0$, если $b_i^{j*}=1$, $\quad\int\limits_Q h^j\cdot u_i d\mu=0$, если $b_i^{j*}=0$,

$\int\limits_Q h^j\cdot u_i d\mu\leq 0$, если $b_i^{j*}=-1$, $i=1,...,n,j=1,...,m$;

c) $\sum\limits_{j=1}^{m}\int\limits_Q h^j\cdot(f^j-u^{j*})d\mu=||\bar{f}-\bar{u}^*||_{1;\alpha,\beta}$;

3) $\forall\bar{u}=(u^1,...,u^m)\in U(\bar{b}^*)$

$$\sum_{j=1}^{m}\int\limits_Q(u^j-u^{j*})\cdot\operatorname{sgn}_{\alpha_j,\beta_j}(f^j-u^{j*})d\mu\leq\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{Z_{f^j-u^{j*}}}|u^j-u^{j*}|_{\beta_i,\alpha_i}d\mu,$$

где $\bar{u}^*=(u^{1*},...,u^{m*})$.

Лемма 1. *Пусть $\bar{f}\in C(Q,\boldsymbol{R}^m)\backslash M(\bar{\varepsilon},\bar{\delta})$, $\bar{u}^*=\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{a}_i^*u_i\in M(\bar{\varepsilon},\bar{\delta})$ и $\bar{h}\in L_\infty(Q,\boldsymbol{R}^m)$ из теоремы 1. Если $\bar{v}=\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{d}_iu_i$ - другой элемент наилучшего $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$-приближения для $\bar{f}$ множеством $M(\bar{\varepsilon},\bar{\delta})$, то*

1) $\sum\limits_{j=1}^{m}\int\limits_Q h^j\cdot(f^j-v^j)d\mu=||\bar{f}-\bar{v}||_{1;\bar{\alpha},\bar{\beta}}$;

2) если $\int\limits_Q h^j\cdot u_i d\mu\neq 0$ для некоторых $i=1,...,n,j=1,...,m$, то

$d_i^j=a_i^{j*}=\delta_i^j$, если $b_i^{j*}=1$, $d_i^j=a_i^{j*}=\varepsilon_i^j$, если $b_i^{j*}=-1$.

Доказательство. Доказательство леммы следует из неравенства, вытекающего из условия (2) теоремы 1,

$$||\bar{f}-\bar{u}^*||_{1;\bar{\alpha},\bar{\beta}}=\sum_{j=1}^{m}\int\limits_Q h^j\cdot(f^j-u^{j*})d\mu\leq\sum_{j=1}^{m}\int\limits_Q h^j\cdot(f^j-v^j)d\mu\leq||\bar{f}-\bar{v}||_{1;\bar{\alpha},\bar{\beta}},$$

и того, чир $\bar{v}=\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{d}_iu_i$ - также элемент наилучшего $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$-приближения для $\bar{f}$ множеством $M(\bar{\varepsilon},\bar{\delta})$, что означает выполнение равенства в верхнем неравенстве. Т. е. имеет место утверждение 1) леммы и $\sum\limits_{j=1}^{m}\int\limits_Q h^j\cdot u^{j*}d\mu=\sum\limits_{j=1}^{m}\int\limits_Q h^j\cdot v^jd\mu$. Учитывая условие (b) из (2) теоремы 1, получаем, что $(a_i^{j*}-d_i^j)\int\limits_Q h^j\cdot u_id\mu\geq 0$, $i=1,...,n$, $j=1,...,m$, и, следовательно, $(a_i^{j*}-d_i^j)\int\limits_Q h^j\cdot u_id\mu=0$, $i=1,...,n,j=1,...,m$. Откуда вытекает утверждение 2) леммы.

Введем обозначения: $I^j = \{i : \int\limits_Q h^j \cdot u_i d\mu = 0\}, J^j = \{1, ..., n\} \backslash I^j, j = 1, ..., m,$ $\widetilde{\widetilde{f}} = (\widetilde{f}^1, ..., \widetilde{f}^m)$, где $\widetilde{f}^j = f^j - \sum\limits_{i \in J^j} a_i^{j*} u_i$.

В силу леммы 1 получаем, что функция $\widetilde{\widetilde{u}} = (\widetilde{u}^1, ..., \widetilde{u}^m)$, где $\widetilde{u}^j = \sum\limits_{i=1}^n \widetilde{a}_i^j u_i$, является элементом наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-приближения для $\widetilde{\widetilde{f}}$ множеством $M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i \in I} \widetilde{\widetilde{a}}_i u_i = (\sum\limits_{i \in I^1} \widetilde{a}_i^1 u_i, ..., \sum\limits_{i \in I^m} \widetilde{a}_i^m u_i) \in P_{M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}$, где

$$M_I(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}) = \{\bar{u} = (u^1, ..., u^m) : \quad u^j = \sum_{i \in I^j} a_i^j u_i, \varepsilon_i^j \leq a_i^j \leq \delta_i^j, i \in I^j, j = 1, ..., m\}.$$

Имеет место теорема, являющаяся обобщением теорем 1 и 2 из [4] на случай несимметричного приближения векторнозначных функций, непрерывных на метрическом компакте.

Теорема 2. *Пусть* $N_j = \{i : \varepsilon_i^j = -\infty, \delta_i^j = +\infty\}$. *Для того, чтобы любая функция* $\bar{f} \in C(Q, \boldsymbol{R}^m)$ *имела единственный элемент наилучшего* $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$*-приближения в* $M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$*, достаточно, а если* $\forall i \notin N_j$ $-\infty < \varepsilon_i^j < \delta_i^j < +\infty$, $j = 1, ..., m$, *то и необходимо, чтобы* $\bar{f} \in C(Q, \boldsymbol{R}^m)$ *имела единственный элемент наилучшего* $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$*-приближения в* $U_k = \{\bar{u} = (u^1, ..., u^m) : u^j \in span\{u_{i_1}, ..., u_{i_{k_j}}\}\}$ *для любых наборов различных* $\{i_1, ..., i_{k_j}\}$*, таких что* $N_j \subseteq \{i_1, ..., i_{k_j}\} \subseteq \{1, ..., n\}$.

Доказательство. Пусть $U_{I^j} = span\{u_i : i \in I^j\}, j = 1, ..., m$. Докажем достаточность. Предположим, что $\bar{u}^* = \sum\limits_{i=1}^n \bar{a}_i^* u_i$, и $\widetilde{\widetilde{u}}^* = \sum\limits_{i=1}^n \widetilde{\widetilde{a}}_i u_i \in P_{M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{f})$, тогда $\sum\limits_{i \in I} \widetilde{\widetilde{a}}_i u_i \in P_{M_I(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\widetilde{\widetilde{f}})$, и существует функция $\bar{h} = (h^1, ..., h^m) \in L_\infty(Q, \mathbf{R}^m)$ такая, что

1) $|h^j(x)|_{1/\alpha_j, 1/\beta_j} = 1$, $\forall x \in Q$, $j = 1, ..., m$;
2) $\int\limits_Q h^j \cdot u_i d\mu = 0$, $i \in I^j$, $j = 1, ..., m$;
3) $\sum\limits_{j=1}^m \int\limits_Q h^j \cdot (\widetilde{f}^j - \sum\limits_{i \in I^j} a_i^{j*} u_i) d\mu = ||\widetilde{\widetilde{f}} - \sum\limits_{i \in I} \bar{a}_i^* u_i||_{1; \alpha, \beta}$;
$\sum\limits_{j=1}^m \int\limits_Q h^j \cdot (\widetilde{f}^j - \sum\limits_{i \in I^j} \widetilde{a}_i^j u_i) d\mu = ||\widetilde{\widetilde{f}} - \sum\limits_{i \in I} \widetilde{\widetilde{a}}_i u_i||_{1; \alpha, \beta}$.

Тогда $\sum\limits_{i \in I} \bar{a}_i^* u_i, \sum\limits_{i \in I} \widetilde{\widetilde{a}}_i u_i \in P_{U_I}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\widetilde{\widetilde{f}})$, где

$$U_I = \{\bar{u} = (u^1, ..., u^m) : u^j \in U_{I^j}, j = 1, ..., m\},$$

и достаточность доказана.

Пусть теперь существует $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m)$ и $\bar{g}' = (g^{1\prime}, ..., g^{m\prime}), \bar{g}'' = (g^{1\prime\prime}, ..., g^{m\prime\prime}) \in U_k$, такие, что $\bar{g}', \bar{g}'' \in P_{U_k}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{f})$, $g^{j\prime} = \sum\limits_{k=1}^{k_j} a_{i_k}^{j\prime} u_{i_k}, g^{j\prime\prime} = \sum\limits_{k=1}^{k_j} a_{i_k}^{j\prime\prime} u_{i_k}$, $\varepsilon_{i_k}^j < a_{i_k}^{j\prime}, a_{i_k}^{j\prime\prime} <$

$\delta^j_{i_k}.k = 1, ..., k_j, j = 1, ..., m$. Так как множество $P^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_{U_k}(\bar{f})$ выпукло, то $\bar{g}' + \bar{u}, \bar{g}'' + \bar{u} \in P^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_{U_k}(\bar{f} + \bar{u})$, $\forall \bar{u} \in U_k$.

По теореме 1 существует $\bar{h} = (h^1, ..., h^m) \in L_\infty(Q, \mathbf{R}^m)$ такая, что

1) $|h^j(x)|_{1/\alpha_j, 1/\beta_j}| = 1$, $\forall x \in Q$, $j = 1, ..., m$;

2) $\int\limits_Q h^j \cdot u_{i_k} d\mu = 0$, $k = 1, ..., k_j$, $j = 1, ..., m$;

3) $\sum\limits_{j=1}^m \int\limits_Q h^j \cdot (f^j - g^{j\prime}) d\mu = ||\bar{f} - \bar{g}'||_{1;\bar{\alpha},\bar{\beta}}$; $\quad \sum\limits_{j=1}^m \int\limits_Q h^j \cdot (f^j - g^{j\prime\prime}) d\mu = ||\bar{f} - \bar{g}''||_{1;\bar{\alpha},\bar{\beta}}$.

Пусть $M_j = \{1, ..., n\} \backslash \{i_1, ..., i_{k_j}\}$.

Тогда $\forall i \in M_j \ -\infty < \varepsilon^j_i < \delta^j_i < +\infty$, $j = 1, ..., m$.

Для $i \in M_j$ положим $\omega^j_i = \delta^j_i$, если $\int\limits_Q h^j u_i d\mu > 0$, $\omega^j_i \in (\varepsilon^j_i, \delta^j_i)$, если $\int\limits_Q h^j u_i d\mu = 0$, $\omega^j_i = \varepsilon^j_i$, если $\int\limits_Q h^j u_i d\mu < 0$.

Рассмотрим функции $\widehat{g} = (g^1, ..., g^m)$, где $g^j = \sum\limits_{i \in M_j} \omega^j_i u_i$, $\widehat{f} = \bar{f} + \widehat{g}$, $\widehat{g}' = \bar{g}' + \widehat{g}$, $\widehat{g}'' = \bar{g}'' + \widehat{g}$. В силу теоремы 1 (2) $\widehat{g}', \widehat{g}'' \in P^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_{M(\bar{\varepsilon},\bar{\delta})}(\bar{f} + \widehat{g})$, что противоречит предположению.

В [5] и [1] были указаны классы «тестовых функций», которые характеризуют подпространства единственности элемента наилучшего L_1-приближения для функций, непрервных на отрезке. В [2] аналогичные классы были получены для наилучшего L_1-приближения с ограничением на коэффициенты для действительных функций, непрерывных накомпакте, а в [6] для векторнозначных функций. Далее получены классы «тестовых функций» для наилучшего несимметричного приближения с ограничением на коэффициенты в интеральной метрике для вектор-функций, непрерывных на метрическом компакте.

Пусть

$$H' = \{\bar{h} \in C(Q, \mathbf{R}^m) | \exists \bar{g}_h \in M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon}) : \forall x \in Q \quad |h^j(x)| = |g^j_h(x)|, j = 1, ..., m\}.$$

Лемма 2. *Пусть* $\bar{h} \in H' \backslash M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$, $\bar{0} \in P^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_{M(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta},\bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}(\bar{h})$, $\bar{g}_h$ *– функция из* $M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$ *такая, что* $|h^j(x)| = |g^j_h(x)|$, $x \in Q$, $j = 1, ..., m$. *Тогда* $\bar{g}_h \in P^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_{M(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta},\bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}(\bar{h})$.

Доказательство. Так как $\bar{h} \in H' \backslash M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$, то $\bar{g}_h \in M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$ такая, что $|h^j(x)| = |g^j_h(x)|$, $x \in Q$, $j = 1, ..., m$, и $\bar{g}_h \neq \bar{h}$. Ясно, что $Z_{h^j} \subset Z_{h^j - g^j_h}$, и $h^j(x) - g^j_h(x) = 2h^j(x)$ $\forall x \in Q \backslash Z_{h^j - g^j_h}$, $j = 1, ..., m$.

Так как $\bar{0} \in P^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_{M(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta},\bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}(\bar{h})$, то по теореме 1 (3)

$$\sum_{j=1}^m \int\limits_Q u^j \cdot sgn_{\alpha_j,\beta_j} h^j d\mu \leq \sum_{j=1}^m \int\limits_{Z_{h^j}} |u^j|_{\beta_j,\alpha_j} d\mu,$$

для любой $\bar{u} \in U(\bar{b}^{*})$, где $b_i^{j*} = 0, i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$.

Для $\bar{g}_h = (g_h^1, ..., g_h^m)$, где $g_h^i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{hi}^j u_i$, положим $\widetilde{b}_i^j = 1$, если $a_{hi}^j = \delta_i^j - \varepsilon_i^j$, $\widetilde{b}_i^j = 0$, если $\varepsilon_i^j - \delta_i^j < a_{hi}^j < \delta_i^j - \varepsilon_i^j$, $\widetilde{b}_i^j = -1$, если $a_{hi}^j = \varepsilon_i^j - \delta_i^j$, $i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$.

Ясно, что $U(\bar{b}^{*}) \supset U(\widetilde{\bar{b}})$.

Тогда, для каждой $\bar{g} \in U(\widetilde{\bar{b}})$

$$\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{Q} g^j \cdot sgn_{\alpha_j,\beta_j}(h^j - g_h^j) d\mu = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{Q \setminus Z_{h^j - g_h^j}} g^j \cdot sgn_{\alpha_j,\beta_j} h^j d\mu =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{Q \setminus Z_{h^j}} g^j \cdot sgn_{\alpha_j,\beta_j} h^j d\mu - \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{Z_{h^j - g_h^j} \setminus Z_{h^j}} g^j \cdot sgn_{\alpha_j,\beta_j} h^j d\mu \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{Z_{h^j}} |g^j|_{\beta_i,\alpha_i} d\mu + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{Z_{h^j - g_h^j} \setminus Z_{h^j}} |g^j|_{\beta_i,\alpha_i} d\mu = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{Z_{h^j - g_h^j}} |g^j|_{\beta_i,\alpha_i} d\mu.$$

В силу теоремы 1 лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть $N_j = \{i : \varepsilon_i^j = -\infty, \delta_i^j = +\infty\}$. Для того, чтобы каждая функция $\bar{f} \in C(Q, \boldsymbol{R}^m)$ имела единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-приближения в $M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$, достаточно, а если $\forall i \notin N_j$ $-\infty < \varepsilon_i^j < \delta_i^j < +\infty$, $j = 1, ..., m$, то и необходимо, чтобы каждая функция $\bar{h} \in H'$ имела единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-приближения в $M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть каждая функция $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m)$ имеет единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-приближения в $M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$. Тогда по теореме 2 каждая функция $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m)$ имеет единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-приближения в U_k для произвольного набора различных $\{i_1, ..., i_{k_j}\} \supseteq N_j$.

Предположим, что $\exists \bar{h} \in H'$, для которой существует более одного элемента наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-приближения в $M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$. Пусть $\widetilde{N}_j = \{i : \varepsilon_i^j - \delta_i^j = -\infty, \delta_i^j - \varepsilon_i^j = +\infty\}$. Ясно, что $N_j \subset \widetilde{N}_j$. В силу теоремы 2 существует набор $\{i_{1^0}, ..., i_{k_j^0}\} \supseteq \widetilde{N}_j \supset N_j$ и функция из $C(Q, \mathbf{R}^m)$, имеющая более одного элемента наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-приближения в U_{k_0}, что противоречит предположению.

Достаточность. Пусть каждая функция $\bar{h} \in H'$ имеет единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-приближения в $M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$, но существует функция $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m)$ такая что $\bar{g}_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{a}_i^1 u_i$ и $\bar{g}_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{a}_i^2 u_i \in P_{M(\bar{\varepsilon},\bar{\delta})}^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}(\bar{f})$, где $\bar{a}_i^1 = (a_i^{1,1}, ..., a_i^{m,1})$, $\bar{a}_i^2 = (a_i^{1,2}, ..., a_i^{m,2})$, $i = 1, ..., n$, $\bar{g}_1 \neq \bar{g}_2$. Тогда, $\frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} \in P_{M(\bar{\varepsilon},\bar{\delta})}^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}(\bar{f})$, и в силу непрерывности f^j, g_1^j и g_2^j, $j = 1, ..., m$, $\forall x \in Q$

$$|(f^j - \frac{g_1^j + g_2^j}{2})(x)|_{\alpha_j,\beta_j} = \frac{1}{2}|(f^j - g_1^j)(x)|_{\alpha_j,\beta_j} + \frac{1}{2}|(f^j - g_2^j)(x)|_{\alpha_j,\beta_j}, j = 1, ..., m. \quad (2)$$

Следовательно,

$$Z_{f^j-(g_1^j+g_2^j)/2} \subset Z_{g_2^j-g_1^j}, j=1,...,m. \tag{3}$$

Положим $\bar h=(h^1,...,h^m)$: $\forall x\in Q$

$$h^j(x)=|(g_2^j-g_1^j)(x)|sgn(f^j-(g_1^j+g_2^j)/2)(x).$$

Ясно, что $\bar h\in H'$.

Так как $\frac{\bar g_1+\bar g_2}{2}\in P^{(\bar\alpha,\bar\beta)}_{M(\bar\varepsilon,\bar\delta)}(\bar f)$, то по теореме 1 (2) существует функция $\bar H=(H^1,...,H^m)\in L_\infty(Q,\mathbf{R}^m)$ такая, что

1) $|H^j(x)|_{1/\alpha_j,1/\beta_j}=1$, $\forall x\in Q$, $j=1,...,m$;

2) $\int\limits_Q H^j\cdot u_i d\mu\geq 0$, если $(a_i^{j,1}+a_i^{j.2})/2=\delta_i^j$,

$\int\limits_Q H^j\cdot u_i d\mu=0$, если $\varepsilon_i^j<(a_i^{j,1}+a_i^{j.2})/2<\delta_i^j$,

$\int\limits_Q H^j\cdot u_i d\mu\leq 0$, если $(a_i^{j,1}+a_i^{j.2})/2=\varepsilon_i^j$, $i=1,...,n, j=1,...,m$;

3) $\sum\limits_{j=1}^m\int\limits_Q H^j\cdot(f^j-(g_1^j+g_2^j)/2)d\mu=||\bar f-(\bar g_1+\bar g_2)/2||_{1;\bar\alpha,\bar\beta}$.

Условия 1) и 3) выполняются тогда и только тогда, когда

$$H^j(x)=sgn_{\alpha_j,\beta_j}(f^j-(g_1^j+g_2^j)/2)(x),\quad \forall x\in Q\backslash Z_{f^j-(g_1^j+g_2^j)/2}, j=1,...,m.$$

В силу определения $\bar h$ и выполнения (3) получаем, что

$$H^j(x)=sgn_{\alpha_j,\beta_j}h^j(x),\quad \forall x\in Q\backslash Z_{g_2^j-g_1^j}, j=1,...,m.$$

Покажем, что $\bar 0\in P^{(\bar\alpha,\bar\beta)}_{M(\bar\varepsilon-\bar\delta,\bar\delta-\bar\varepsilon)}(\bar h)$.

Пусть $I^j=\{i:\int\limits_Q H^j\cdot u_i d\mu=0\}$, $J^j=\{1,...,n\}\backslash I^j, j=1,...,m$. Так как $\bar g_1,\bar g_2\in P^{(\bar\alpha,\bar\beta)}_{M(\bar\varepsilon,\bar\delta)}(\bar f)$, то по лемме 1 $\forall i\in J^j$ $a_i^{j,1}=a_i^{j,2}, j=1,...,m$. Тогда функция запишется в виде

$$h^j(x)=|\sum_{i\in I^j}(a_i^{j,1}-a_i^{j,2})u_i(x)|\cdot sgn(f^j-(g_1^j+g_2^j)/2)(x),\quad x\in Q,$$

и в силу теоремы 1, $\bar 0\in P^{(\bar\alpha,\bar\beta)}_{M_I(\bar\varepsilon-\bar\delta,\bar\delta-\bar\varepsilon)}(\bar h)$ или $\bar 0\in P^{(\bar\alpha,\bar\beta)}_{M(\bar\varepsilon-\bar\delta,\bar\delta-\bar\varepsilon)}(\bar h)$. Учитывая лемму 2, получаем противоречие.

Пусть теперь $\omega(t)=\max\limits_{i=1,...,n}\omega(u_i,t)$, где

$$\omega(u_i,t)=\sup\{|u_i(x_1)-u_i(x_2)|:x_1,x_2\in Q,\rho(x_1,x_2)\leq t\}, i=1,...,n,$$

$$E(x,M)=\inf\{\rho(x,y):y\in M\}$$

и пусть

$$H''=\{\bar h\in C(Q,\mathbf{R}^m)|\exists\bar g_h\in M(\bar\varepsilon-\bar\delta,\bar\delta-\bar\varepsilon):|h^j(x)|=\omega(E(x,Z_{g_h^j})),x\in Q,j=1,...,m\}.$$

Теорема 4. *Пусть* $N_j = \{i : \varepsilon_i^j = -\infty, \delta_i^j = +\infty\}$. *Для того, чтобы каждая функция* $\bar{f} \in C(Q, \boldsymbol{R}^m)$ *имела единственный элемент наилучшего* $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$*-приближения в* $M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$*, достаточно, а если* $\forall i \notin N_j$ $-\infty < \varepsilon_i^j < \delta_i^j < +\infty$, $j = 1, ..., m$, *то и необходимо, чтобы каждая функция* $\bar{h} \in H''$ *имела единственный элемент наилучшего* $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$*-приближения в* $M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$.

Доказательство. Необходимость доказывается так же, как в теореме 3. Достаточность. Пусть каждая функция $\bar{h} \in H''$ имеет единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-приближения в $M(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta}, \bar{\delta}-\bar{\varepsilon})$, но существует функция $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m)$, для которой $P^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_{M(\bar{\varepsilon},\bar{\delta})}(\bar{f})$ содержит два различных элемента $\bar{g}_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{a}_i^1 u_i$ и $\bar{g}_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{a}_i^2 u_i$, где $\bar{a}_i^1 = (a_i^{1,1}, ..., a_i^{m,1})$, $\bar{a}_i^2 = (a_i^{1,2}, ..., a_i^{m,2})$, $i = 1, ..., n$. Тогда, $\frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} \in P^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_{M(\bar{\varepsilon},\bar{\delta})}(\bar{f})$, и выполняются (2) и (3). Пусть

$$h^j(x) = \omega(E(x, Z_{g_1^j - g_2^j})) \cdot sgn(f^j - (g_1^j + g_2^j)/2)(x), \quad x \in Q, j = 1, ..., m.$$

Так как

$$Z_{\omega(E(x,Z_{g_1^j - g_2^j}))} \subset Z_{g_1^j - g_2^j}, \quad j = 1, ..., m. \tag{4}$$

то $\bar{h} = (h^1, ..., h^m) \in H''$.

В силу непрерывности, неубывания, полуаддитивности модуля непрерывности и включения (4), получаем

$$|(g_1^j - g_2^j)(x)| \le \sum_{i=1}^{n} (\delta_i^j - \varepsilon_i^j) \omega(E(x, Z_{g_1^j - g_2^j})), \quad \forall x \in Q, j = 1, ..., m.$$

Таким образом, существует $\theta = \max\{\sum\limits_{i=1}^{n} (\delta_i^j - \varepsilon_i^j), j = 1, ..., m\} > 1$ такое, что $\forall x \in Q$

$$|(g_1^j - g_2^j)(x)| \le \theta \cdot |h^j(x)|, \quad j = 1, ..., m.$$

Следовательно, $\forall \gamma \in (0, 1)$

$$(h^j - \frac{\gamma}{\theta}(g_2^j - g_1^j))(x) \cdot (f^j - (g_1^j + g_2^j)/2)(x) \ge 0, \quad \forall x \in Q,$$

и $\forall x \in Q \backslash Z_{g_1^j - g_2^j}$

$$sgn(h^j - \frac{\gamma}{\theta}(g_2^j - g_1^j))(x) = sgn(f^j - (g_1^j + g_2^j)/2)(x), \quad j = 1, ..., m. \tag{5}$$

Так как $\frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} \in P^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_{M(\bar{\varepsilon},\bar{\delta})}(\bar{f})$, то по теореме 1 (2) существует функция $\bar{H} \in L_\infty(Q, \mathbf{R}^m)$ такая, что

1) $|H^j(x)|_{1/\alpha_j, 1/\beta_j} = 1$, $\forall x \in Q$, $j = 1, ..., m$;

2) $\int\limits_Q H^j \cdot u_i d\mu \ge 0$, если $(a_i^{j,1} + a_i^{j.2})/2 = \delta_i^j$,

$\int\limits_Q H^j \cdot u_i d\mu = 0$, если $\varepsilon_i^j < (a_i^{j,1} + a_i^{j.2})/2 < \delta_i^j$,

$\int\limits_Q H^j \cdot u_i d\mu \le 0$, если $(a_i^{j,1} + a_i^{j.2})/2 = \varepsilon_i^j$, $i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$;

3) $\sum\limits_{j=1}^{m} \int\limits_Q H^j \cdot (f^j - (g_1^j + g_2^j)/2) d\mu = ||\bar{f} - (\bar{g}_1 + \bar{g}_2)/2||_{1;\bar{\alpha},\bar{\beta}}$.

или $H^j(x) = sgn_{\alpha_j,\beta_j}(f^j - (g_1^j + g_2^j)/2)(x), \forall x \in Q \backslash Z_{f^j - (g_1^j + g_2^j)/2}, j = 1, ..., m$.

Учитывая (5), получаем $H^j(x) = sgn_{\alpha_j,\beta_j}(h^j - \frac{\gamma}{\theta}(g_2^j - g_1^j))(x)$, $\forall x \in Q \backslash Z_{g_1^j - g_2^j}$, $j = 1, ..., m$.

Положим, как и в теореме 3, $I^j = \{i : \int\limits_Q H^j \cdot u_i d\mu = 0\}$, $J^j = \{1, ..., n\} \backslash I^j$, $j = 1, ..., m$. По лемме 1 $a_i^{j,1} = a_i^{j,2}$, $\forall i \in J^j$, и $\frac{\gamma}{\theta}(g_2^j - g_1^j) = \sum\limits_{i \in I^j} \frac{\gamma}{\theta}(a_i^{j,2} - a_i^{j,1}) \cdot u_i$, $j = 1, ..., m$. А так как

$$\varepsilon_i^j - \delta_i^j < \frac{\gamma}{\theta}(a_i^{j,2} - a_i^{j,1}) < \delta_i^j - \varepsilon_i^j, \quad i = 1, ..., n, j = 1, ..., m,$$

то в силу теоремы 1 получаем, что $\frac{\gamma}{\theta}(\bar{g}_2 - \bar{g}_1) \in P^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_{M_I(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta},\bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}(\bar{h})$ или $\frac{\gamma}{\theta}(\bar{g}_2 - \bar{g}_1) \in P^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_{M(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta},\bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}(\bar{h})$, $\forall \gamma \in (0, 1)$, что противоречит предположению.

Теорема 5. *Каждая функция $\bar{h} \in H''$ имеет единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$-приближения в $M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$, тогда и только тогда, когда для любой ненулевой функции $\bar{h} \in H''$ ноль не является элементом наилучшего $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$-приближения в $M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$.*

Доказательство. Пусть каждая $\bar{h} \in H''$ имеет единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$-приближения в $M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$, но существует $\bar{h}_1 \in H''$ $(\bar{h}_1 \ne \bar{0})$ такая, что $\bar{0} \in P^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_{M(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta},\bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}(\bar{h}_1)$. Так как $\bar{h}_1 \in H''$, то $\exists \bar{g}_{h_1} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{h_1} u_i \in M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$, где $\bar{a}_i^{h_1} = (a_i^{1,h_1}, ..., a_i^{m,h_1})$, такая что $|h_1^j(x)| = \omega(E(x, Z_{g^j_{\bar{h}_1}}))$, $j = 1, ..., m$, $x \in Q$, и $Z_{h_1^j} \subset Z_{g^j_{\bar{h}_1} - h_1^j}$, $j = 1, ..., m$.

Существует $\theta > 1$ такое, что $\theta |h_1^j(x)| \ge |g^j_{\bar{h}_1}(x)|$, $j = 1, ..., m$, что означает, что $(h_1^j - g^j_{\bar{h}_1}/\theta)(x) \cdot h_1^j(x) \ge 0$, $j = 1, ..., m, \forall x \in Q$.

Так как $\bar{0} \in P^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_{M(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta},\bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}(\bar{h}_1)$, то по теореме 1 (3)

$$\sum_{j=1}^{m} \int\limits_Q u^j \cdot sgn_{\alpha_j,\beta_j} h_1^j d\mu \le \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{Z_{h_1^j}} |u^j|_{\beta_j,\alpha_j} d\mu,$$

для любой $\bar{u} = (u^1, ..., u^m) \in U(\bar{b}^*)$, где $b_i^{j*} = 0$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$.

Для $\frac{1}{\theta}g^j_{\bar{h}_1} = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}a_i^{j,h_1}u_i$ положим $\widetilde{b}_i^j = 1$, если $a_i^{j,h_1}/\theta = \delta_i^j - \varepsilon_i^j$, $\widetilde{b}_i^j = 0$, если $\varepsilon_i^j - \delta_i^j < a_i^{j,h_1}/\theta < \delta_i^j - \varepsilon_i^j$, $\widetilde{b}_i^j = -1$ если $a_i^{j,h_1}/\theta = \varepsilon_i^j - \delta_i^j$, а так как $\theta > 1$, то $\widetilde{b}_i^j = 0$, $i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$. Следовательно $U(\bar{b}^*) = U(\bar{\widetilde{b}})$.

Тогда для каждой $\bar{u} \in U(\bar{\widetilde{b}})$

$$\sum_{j=1}^{m}\int\limits_Q u^j \cdot sgn_{\alpha_j,\beta_j}(h_1^j - g^j_{\bar{h}_1}/\theta)d\mu = \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{Q\setminus Z_{h_1^j}} u^j \cdot sgn_{\alpha_j,\beta_j}h_1^j d\mu -$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{Z_{h_1^j - g^j_{\bar{h}_1}/\theta}\setminus Z_{h_1^j}} u^j \cdot sgn_{\alpha_j,\beta_j}h_1^j d\mu \le \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{Z_{h_1^j - g^j_{\bar{h}_1}/\theta}} |u^j|_{\beta_i,\alpha_i}d\mu.$$

В силу теоремы 1 (3) получили противоречие предположению.

Пусть теперь $\forall\bar{h} \in H''$ $(\bar{h} \ne \bar{0})$ $\bar{0} \notin P^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_{M(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta},\bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}(\bar{h})$, но $\exists\bar{h}_0 \in H''$ такая, что $\bar{g}_1 = \sum\limits_{i=1}^{n}\bar{a}_i^1 u_i$, $\bar{g}_2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\bar{a}_i^2 u_i \in P^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_{M(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta},\bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}(\bar{h}_0)$, где $\bar{a}_i^s = (a_i^{1,s}, ..., a_i^{m,s})$, $s = 1, 2$. Тогда, $\frac{\bar{g}_1+\bar{g}_2}{2} \in P^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_{M(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta},\bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}(\bar{h}_0)$, и $Z_{h_0^j-(g_1^j+g_2^j)/2} \subset Z_{g_2^j-g_1^j}, j = 1, ..., m$.

Пусть

$$h_1^j(x) = \omega(E(x, Z_{(g_2^j-g_1^j)/2}))\cdot sgn(h_0^j - (g_1^j + g_2^j)/2)(x), \quad x \in Q, j = 1, ..., m.$$

.

Ясно, что $\bar{h}_1 = (h_1^1, ..., h_1^m) \in H''$, $Z_{h_1^j} \subset Z_{g_2^j-g_1^j}, j = 1, ..., m$.

Так как $\frac{\bar{g}_1+\bar{g}_2}{2} \in P^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_{M(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta},\bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}(\bar{h}_0)$, то по теореме 1 (2) существует $\bar{H} = (H^1, ..., H^m) \in L_\infty(Q, \mathbf{R}^m)$ такая, что

1) $|H^j(x)|_{1/\alpha_j,1/\beta_j} = 1$, $\forall x \in Q$, $j = 1, ..., m$;

2) $\int\limits_Q H^j \cdot u_i d\mu \ge 0$, если $(a_i^{j,1} + a_i^{j.2})/2 = \delta_i^j - \varepsilon_i^j$,

$\int\limits_Q H^j \cdot u_i d\mu = 0$, если $\varepsilon_i^j - \delta_i^j < (a_i^{j,1} + a_i^{j.2})/2 < \delta_i^j - \varepsilon_i^j$,

$\int\limits_Q H^j \cdot u_i d\mu \le 0$, если $(a_i^{j,1} + a_i^{j.2})/2 = \varepsilon_i^j - \delta_i^j$, $i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$;

3) $\sum\limits_{j=1}^{m}\int\limits_Q H^j \cdot (h_0^j - (g_1^j + g_2^j)/2)d\mu = ||\bar{h}_0 - (\bar{g}_1 + \bar{g}_2)/2||_{1;\bar{\alpha},\bar{\beta}}$;

или $H^j(x) = sgn_{\alpha_j,\beta_j}(h_0^j - (g_1^j + g_2^j)/2)(x), \forall x \in Q\setminus Z_{h_0^j-(g_1^j+g_2^j)/2}, j = 1, ..., m$.

С другой стороны, $H^j(x) = sgn_{\alpha_j,\beta_j}h_1^j(x)$, $\forall x \in Q\setminus Z_{h_1^j}, j = 1, ..., m$.

В силу теоремы 1 (2) получаем, что $\bar{0} = \sum\limits_{i\in I}\bar{0}\cdot u_i \in P^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_{M_I(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta},\bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}(\bar{h}_1)$, а так как множество элементов наилучшего приближения выпукло, то $\bar{0} = \sum\limits_{i=1}^{n}\bar{0}\cdot u_i \in P^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_{M(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta},\bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}(\bar{h}_1)$.

Из теорем 1 (3), 3, 4 и 5 получаем

Теорема 6. *Пусть* $N_j = \{i : \varepsilon_i^j = -\infty, \delta_i^j = +\infty\}$. *Для того, чтобы каждая функция* $\bar{f} \in C(Q, \boldsymbol{R}^m)$ *имела единственный элемент наилучшего* $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$*-приближения в* $M(\bar{\varepsilon},\bar{\delta})$*, достаточно, а если* $\forall i \notin N_j$ $-\infty < \varepsilon_i^j < \delta_i^j < +\infty$, $j = 1,...,m$, *то и необходимо, чтобы для любой функции* $\bar{h} = (h^1,...,h^m) \in H'(H'')$ $\bar{h} \neq \bar{0}$ *существовала функция* $\bar{u} = (u^1,...,u^m) \in U(\bar{0}) = \{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{c}_i u_i(x) : \bar{c}_i = (c_i^1,...,c_i^m), c_i^j \in (-\infty;+\infty), j = 1,...,m, i = 1,...,n\}$ *такая, что*

$$\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{Q} u^j \cdot \mathrm{sgn}_{\alpha_j,\beta_j} h^j d\mu > \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{Z_{h^j}} |u^j|_{\beta_i,\alpha_i} d\mu.$$

Библиографические ссылки

1. *Бабенко В. Ф.* О единственности элемента наилучшего приближения в метрике пространства L_1 / В. Ф. Бабенко, В. Н. Глушко // Укр. мат. журн., 1994. — Т. 46, № 5. — С. 475–483.
2. *Горбенко М. Е.* О единственности элемента наилучшего L_1-приближения с ограничением на коэффициенты /М. Е. Горбенко // Вісник Дніпропет. ун-ту, Серія: Математика, 2000. — Вип. 5. — С. 47–55.
3. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближений /Н. П. Корнейчук. — М., 1987.
4. *Pinkus A., Strauss H.* L_1-approximation with Constraints / A. Pinkus, H. Strauss // Transaction of the American Mathematical Society, 1990. — Vol. 322, № 1. — P. 239–261.
5. *Strauβ H.* Eindeutigkeit in der L_1-approximation // Math. Z., 1981. — P. 63–74.
6. *Ткаченко М. Е.* О единственности элемента наилучшего L_1-приближения с ограничением на коэффициенты для векторнозначных функций / М. Е. Ткаченко // Вісник Дніпропет. ун-ту, Серія: Математика, 2002. — Вип. 7. — С. 92–102.

Надійшла до редколегії 1.05.2013