ISSN 9125 0912. *Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2013, вип.* **18**

УДК 517.5

Об аналоге одной проблемы Эрдёша для непериодических сплайнов на действительной оси

В. А. Кофанов*

* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. *E-mail: vladimir.kofanov@gmail.com*

Розв'язана задача (аналогiчна задачi Ердьоша для тригонометричних полiномiв) про характеризацiю полiномiального сплайна порядку r мiнiмального дефекту з вузлами в точках kh, $k \in \mathbf{Z}$, i фiксованою рiвномiрною нормою, графiк якого на довiльно заданому вiдрiзку має найбiльшу довжину.

Ключовi слова: **нерiвностi для сплайнiв, задача Ердьоша.**

Решена задача (аналогичная задаче Эрдёша для тригонометрических полиномов) о характеризации полиномиального сплайна порядка r минимального дефекта с узлами в точках kh, $k \in \mathbf{Z}$, и фиксированной равномерной нормой, график которого на произвольно заданном отрезке имеет максимальную длину.

Ключевые слова: **неравенства для сплайнов, задача Эрдёша.**

We solve the analog of some problem of Erdös about the characterization of the nonperiodic splines of order r minimal defect with knots at the points kh, $k \in \mathbf{Z}$, and fix uniform norm that has maximal arc lens over any fixed interval.

Key words: **inequalities for splines, problem of Erdös.**

Пусть $G = \mathbf{R}$ или $G = [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$. Через $L_p(G)$, $0 < p \le \infty$, будем обозначать пространство всех измеримых функций $x : G \to \mathbf{R}$, таких что $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, где $\|x\|_{L_p(G)} := (\int\limits_G |x(t)|^p \, dt)^{1/p}$, если $0 < p < \infty$, и $\|x\|_{L_p(G)} := = \operatorname{vrai}\sup\limits_{t \in G} |x(t)|$, если $p = \infty$. Вместо $\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R})}$ будем писать $\|x\|_\infty$. Символом L^r_∞, $r \in \mathbf{N}$, будем обозначать пространство всех функций $x \in L_\infty(\mathbf{R})$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка, причем $x^{(r)} \in L_\infty(\mathbf{R})$.

Будем говорить, что $f \in L^1_\infty$ является функцией сравнения для $x \in L^1_\infty$, если $\|x\|_\infty \le \|f\|_\infty$ и из равенства $x(\xi) = f(\eta)$, $\xi, \eta \in \mathbf{R}$, вытекает неравенство $|x'(\xi)| \le |f'(\eta)|$, если указанные производные существуют.

Нечетную 2ω-периодическую функцию $\varphi \in L^1_\infty$ назовем S-функцией, если она обладает свойствами: φ – четная относительно $\omega/2$, $|\varphi|$ – выпуклая вверх на $[0, \omega]$ и строго монотонная на $[0, \omega/2]$. Для $k = 0, 1, 2, ...$ и S-функции $\varphi \in L^{k+1}_\infty$ через S^k_φ обозначим класс функций $x \in L^{k+1}_\infty$, таких что $\varphi^{(i)}$ является функцией сравнения для $x^{(i)}$, $i = 0, 1, , , , k$.

Пусть далее $W-$ класс непрерывных, неотрицательных и выпуклых функций Φ на $[0, \infty)$, таких что $\Phi(0) = 0$. Важнейшими примерами функций класса W являются функции $\Phi(t) = t^s$, $s \ge 1$. Для $p > 0$ положим [1]

$$L(x)_p := \sup\left\{\|x\|_{L_p[a,b]} : \; a, b \in \mathbf{R}, \; |x(t)| > 0, \; t \in (a, b)\right\}. \qquad (1)$$

Заметим, что $L(x)_\infty = \|x\|_\infty$.

В работе [2] для произвольного отрезка $[\alpha,\beta]\subset \mathbf{R}$ решена экстремальная задача

$$\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|x(t)|^p)dt \to \sup, \quad \Phi\in W, \quad p>0, \tag{2}$$

на классе функций S^0_φ, удовлетворяющих условию $L(x)_p \le L(\varphi)_p$, и как следствие получено решение задачи

$$\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|x^{(k)}(t)|)dt \to \sup, \quad \Phi\in W, \quad k=1,2,..., \tag{3}$$

на классах S^k_φ. В частности, задачи (2) и (3) были решены на классах

$$\{x\in L^r_\infty : \|x^{(r)}\|_\infty \le A_r, L(x)_p \le A_0\}$$

и на ограниченных подмножествах пространств T_n (тригонометрических полиномов порядка не выше n) и $S_{n,r}$ (2π-периодических сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n, k\in\mathbf{Z}$). Отметим, что решение задачи (3) для непрерывно-дифференцируемых положительных функций Φ, таких что $\Phi(t)/t$ не убывает и $\Phi(0)=0$ было получено ранее в работе Боянова и Найденова [3]. В качестве следствия ими была решена задача Эрдёша [4] о характеризации тригонометрического полинома с фиксированной равномерной нормой, график которого на заданном отрезке $[\alpha,\beta]\subset\mathbf{R}$ имеет максимальную длину.

Символом $\varphi_r(t)$, $r\in\mathbf{N}$, обозначим сдвиг r-го 2π-периодического интеграла с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin t$, такой что $\varphi(0)=0$. Для $\lambda>0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$. Сплайны $\varphi_{\lambda,r}(t)$ являются важнейшими примерами S-функций.

Для $h>0$, $r\in\mathbf{N}$, через $\sigma_{h,r}$ обозначим множество полиномиальных сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках kh, $k\in\mathbf{Z}$. Таким образом, $s(x)$ на каждом из отрезков $[kh,(k+1)h]$ является алгебраическим многочленом порядка не выше r. Отметим, что $S_{n,r}\subset\sigma_{h,r}$ при $h=\pi/n$, $n\in\mathbf{N}$. Ясно, что для подходящего сдвига $\varphi_{\lambda,r}(\cdot+\tau)$ при $\lambda=\pi/h$ имеет место включение $\varphi_{\lambda,r}(\cdot+\tau)\in\sigma_{h,r}$.

В настоящей работе получено обобщение одного неравенства Магарил-Ильяева [5] для сплайнов класса $\sigma_{h,r}$ (теорема 1). С помощью теоремы 1 и результатов работы [2] для произвольного отрезка $[\alpha,\beta]\subset\mathbf{R}$, заданных $r\in\mathbf{N}$, A, $h,p>0$ решена следующая экстремальная задача

$$\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|s^{(k)}(t)|^p)dt \to \sup, \quad \Phi\in W,$$

на классе сплайнов $s\in\sigma_{h,r}$, удовлетворяющих условию

$$L(s)_p \le AL(\varphi_{\lambda,r})_p, \qquad \lambda=\pi/h, \tag{4}$$

в следующих случаях: 1) $k = 0$, $p > 0$, 2) $k = 1, ..., r-1$, $p = 1$ (теорема 2). Как следствие решена задача (аналогичная проблеме Эрдёша) о характеризации сплайна $s \in \sigma_{h,r}$ с фиксированной равномерной нормой, график которого на заданном отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ имеет максимальную длину (следствие 2).

Лемма 1. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $p > 0$. Тогда для любой функции $x \in L^r_\infty$*

$$\|x\|_\infty \le \|\varphi_r\|_\infty \left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha},$$

где $\alpha = r/(r+1/p)$, а функционал $L(x)_p$ определен равенством (1).

Доказательство. Зафиксируем функцию $x \in L^r_\infty$, такую что $L(x)_p < \infty$. Положим $A_r := \|x^{(r)}\|_\infty$ и выберем $\lambda > 0$ так, чтобы

$$L(x)_p = A_r L(\varphi_{\lambda,r})_p\,. \tag{5}$$

Используя очевидное равенство $L(\varphi_{\lambda,r})_p = \lambda^{-(r+1/p)} L(\varphi_r)_p$, из (5) имеем

$$\lambda^{-1} = \left(\frac{L(x)_p}{A_r L(\varphi_r)_p}\right)^{\frac{1}{r+1/p}}.$$

В работе [6] доказано, что из условия (5) для функции $x \in L^r_\infty$ следует неравенство $\|x\|_\infty \le A_r \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty = A_r \lambda^{-r} \|\varphi_r\|_\infty$. Поэтому

$$\|x\|_\infty \le A_r \, \|\varphi_r\|_\infty \left(\frac{L(x)_p}{A_r L(\varphi_r)_p}\right)^{\frac{r}{r+1/p}} = \|\varphi_r\|_\infty \left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}.$$

Лемма 1 доказана.

Докажем теперь необходимую в дальнейшем модификацию следующего неравенства Магарил-Ильяева [5] для непериодических сплайнов:

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^r \frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty}, \qquad s \in \sigma_{h,r}. \tag{6}$$

Лемма 2. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $p, h > 0$. Тогда для любого сплайна $s \in \sigma_{h,r}$*

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^{r+1/p} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}.$$

Доказательство. Зафиксируем сплайн $s \in \sigma_{h,r}$. Ясно, что $s \in L^r_\infty$. Поэтому, применяя к нему неравенство (6) и оценивая норму $\|s\|_\infty$ при помощи леммы 1, получим

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^r \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^\alpha \|s^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \qquad \alpha = r/(r+1/p),$$

или

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty^\alpha \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^r \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^\alpha.$$

Отсюда сразу следует утверждение леммы 2, если учесть, что $r/\alpha = r + 1/p$.

Ниже приведены необходимые в дальнейшем результаты работы [2]. Пусть φ – S-функция с периодом 2ω. Зафиксируем произвольный отрезок $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ и $p > 0$. Следуя Боянову и Найденову [3], представим длину отрезка $[\alpha, \beta]$ в виде

$$\beta - \alpha = n\omega + 2\Theta, \qquad \Theta \in (0, \omega), \tag{7}$$

где $n \in \mathbf{N}$ или $n = 0$, и рассмотрим функцию $\varphi(t + \tau)$, где τ выбрано так, что

$$|\varphi(\alpha + \Theta + \tau)| = |\varphi(\beta - \Theta + \tau)| = \|\varphi\|_\infty. \tag{8}$$

Теорема A [2]. *Пусть φ – S-функция, $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$, $p > 0$, $\Phi \in W$. Тогда*

$$\sup \left\{ \int\limits_\alpha^\beta \Phi(|x(t)|^p) dt : x \in S_\varphi^0,\ L(x)_p \le L(\varphi)_p \right\} = \int\limits_\alpha^\beta \Phi(|\varphi(t + \tau)|^p) dt,$$

где τ выбрано из условия (8).

Кроме того, если $k \in \mathbf{N}$, $\varphi \in L_\infty^{k+1}$ – S-функция , то

$$\sup \left\{ \int\limits_\alpha^\beta \Phi(|x^{(k)}(t)|) dt : x \in S_\varphi^k \right\} = \int\limits_\alpha^\beta \Phi(|\varphi^{(k)}(t + \tau + \tau_k)|) dt,$$

где

$$\tau_k := \frac{\omega}{4} \left(1 + (-1)^{k+1}\right).$$

Перейдем к формулировке основных результатов.

Теорема 1. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $k = 0, 1, ..., r - 1$, $p > 0$. Тогда для любого сплайна $s \in \sigma_{h,r}$*

$$\left\|s^{(k)}\right\|_\infty \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^{k+1/p} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p} \cdot \|\varphi_{r-k}\|_\infty. \tag{9}$$

Неравенство (9) является точным на классе $\sigma_{h,r}$ и обращается в равенство для любого сдвига $s(\cdot + \tau)$ сплайна $s(t) = \varphi_{\lambda,r}(t)$, где $\lambda = \pi/h$.

Доказательство. При $k = r$ утверждение теоремы уже доказано (лемма 2).

Зафиксируем сплайн $s \in \sigma_{h,r}$ и докажем (9) для остальных значений k. Пусть сначала $k = 0$. Оценивая $\|s\|_\infty$ при помощи леммы 1, а затем $\|s^{(r)}\|_\infty$– при помощи леммы 2, получим

$$\|s\|_\infty \le \|\varphi_r\|_\infty \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^\alpha \|s^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha} \le \|\varphi_r\|_\infty \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^\alpha \left[\left(\frac{\pi}{h}\right)^{r+1/p} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right]^{1-\alpha},$$

где $\alpha = r/(r + 1/p)$. Отсюда следует (9) при $k = 0$ так как $(1 - \alpha)(r + 1/p) = 1/p$.

Пусть теперь $1 \le k \le r-1$. Применим к сплайну s неравенство Колмогорова [7]:

$$\left\|s^{(k)}\right\|_\infty \le \|\varphi_{r-k}\|_\infty \left(\frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{\frac{r-k}{r}} \left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{k}{r}}.$$

Снова оценивая $\|s\|_\infty$ при помощи леммы 1, получим

$$\left\|s^{(k)}\right\|_\infty \le \|\varphi_{r-k}\|_\infty \left[\left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\alpha} \|s^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}\right]^{\frac{r-k}{r}} \left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{k}{r}} =$$

$$= \|\varphi_{r-k}\|_\infty \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\alpha\frac{r-k}{r}} \left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{k}{r}+(1-\alpha)\frac{r-k}{r}}.$$

Оценивая теперь $\|s^{(r)}\|_\infty$ при помощи леммы 2, и учитывая равенство $\frac{k}{r}+(1-\alpha)\frac{r-k}{r} = 1-\alpha\frac{r-k}{r}$, будем иметь

$$\left\|s^{(k)}\right\|_\infty \le \|\varphi_{r-k}\|_\infty \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\alpha\frac{r-k}{r}} \left[\left(\frac{\pi}{h}\right)^{r+1/p} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right]^{1-\alpha\frac{r-k}{r}} =$$

$$= \|\varphi_{r-k}\|_\infty \left(\frac{\pi}{h}\right)^{(r+1/p)(1-\alpha\frac{r-k}{r})} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}.$$

Отсюда следует (9), если учесть, что

$$\left(r+\frac{1}{p}\right)\left(1-\alpha\frac{r-k}{r}\right) = \left(r+\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{r}{r+1/p}\cdot\frac{r-k}{r}\right) =$$

$$= \left(r+\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{r-k}{r+1/p}\right) = \left(r+\frac{1}{p}\right)\frac{k+1/p}{r+1/p} = k+\frac{1}{p}.$$

Точность неравенства (9) легко проверяется при помощи равенства $L(\varphi_{\lambda,r})_p = \lambda^{-(r+1/p)} L(\varphi_r)_p$. Теорема 1 доказана.

Замечание. При $h = \pi/n$, $n \in \mathbf{N}$, $k > 0$, $p = \infty$, неравенство (9) (для $s \in S_{n,r}$) было доказано ранее Тихомировым [8].

Для $A_0, h, p > 0$ положим $\lambda = \pi/h$ и

$$\sigma_{h,r}(A_0,p) := \{s(\cdot+\tau) : s \in \sigma_{h,r},\ L(s)_p \le A_0 L(\varphi_{\lambda,r})_p,\ \tau \in \mathbf{R}\}. \tag{10}$$

Теорема 2. . *Пусть $r \in \mathbf{N}$, A_0, h, $p > 0$, $\lambda = \pi/h$, $\Phi \in W$. Для любого отрезка $[\alpha,\beta] \subset \mathbf{R}$*

$$\sup\left\{\int_\alpha^\beta \Phi(|s(t)|^p)dt : s \in \sigma_{h,r}(A_0,p)\right\} = \int_\alpha^\beta \Phi(A_0|\varphi_{\lambda,r}(t+\tau)|^p)dt,$$

где τ *удовлетворяет равенству (8) с* $\varphi = \varphi_{\lambda,r}$, *т.е.* $|\varphi_{\lambda,r}(\alpha+\theta+\tau)| = |\varphi_{\lambda,r}(\beta-\theta+\tau)| = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty$, *а* θ *определено равенством (7) с* $\omega = h$, *т. е.* $\beta - \alpha = mh + 2\Theta$, *где* $m \in \mathbf{N}$ *или* $m = 0$, $\Theta \in (0, h/2)$.

Кроме того, для любого $k = 1, , ..., r-1$

$$\sup\left\{\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|s^{(k)}(t)|)dt : s \in \sigma_{h,r}(A_0,p)\right\} = \int\limits_\alpha^\beta \Phi\left(\left(\frac{\pi}{h}\right)^k A_0|\varphi_{\lambda,r-k}(t+\tau+\tau_k)|\right)dt,$$

где $\tau_k := \frac{h}{4}\left(1+(-1)^{k+1}\right)$.

Доказательство. Положим $\varphi(t) := A_0\varphi_{\lambda,r}(t)$. Ясно, что φ является S-функцией с периодом $2\omega = 2\pi/\lambda = 2h$. Покажем, что для любого $k = 0, 1, , ..., r-1$ имеет место включение

$$\sigma_{h,r}(A_0,p) \subset S^k_\varphi. \tag{11}$$

Зафиксируем $s \in \sigma_{h,r}$. Применяя неравенство (9) теоремы 1 при $k = 0$, получим

$$\|s\|_\infty \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^{1/p} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p} \cdot \|\varphi_r\|_\infty.$$

Из этого неравенства и условия $L(s)_p \le A_0 L(\varphi_{\lambda,r})_p = A_0\lambda^{-(r+1/p)}L(\varphi_r)_p$, вытекающего из определения (10), следует, что

$$\|s\|_\infty \le \lambda^{1/p} \cdot \frac{A_0\lambda^{-(r+1/p)}L(\varphi_r)_p}{L(\varphi_r)_p} \cdot \|\varphi_r\|_\infty = A_0\lambda^{-r}\|\varphi_r\|_\infty = A_0\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty.$$

Отсюда в силу неравенства (6) имеем

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^r \frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty} \le \lambda^r \frac{A_0\lambda^{-r}\|\varphi_r\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty} = A_0.$$

Таким образом, выполнены оба условия $\|s\|_\infty \le A_0\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty$ и $\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le A_0$ теоремы сравнения Колмогорова [7]. Согласно этой теореме $\varphi(t)$ является функцией сравнения для s, а $\varphi^{(k)}$ является функцией сравнения для $s^{(k)}$, $k = 0, 1, ..., r-1$. Тем самым включение (11) доказано, Теперь утверждение теоремы 2 следует из теоремы A. Теорема 2 доказана.

Полагая $\Phi(t) = t^{q/p}$ в первой части теоремы и $\Phi(t) = t^q$– во второй ее части, получаем такое следствие.

Следствие 1. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, A_0, h, $p > 0$, $\lambda = \pi/h$. *Если* $k = 0$, $q \ge p > 0$, *или* $k = 1, ..., r-1$, $q \ge 1$, *то для любого отрезка* $[\alpha,\beta] \subset \mathbf{R}$

$$\sup\left\{\|s^{(k)}\|_{L_q[\alpha,\beta]} : s \in \sigma_{h,r}(A_0,p)\right\} = A_0\left(\frac{\pi}{h}\right)^k \|\varphi_{\lambda,r-k}(\cdot+\tau+\tau_k)\|_{L_q[\alpha,\beta]},$$

где τ *и* τ_k *такие, как в теореме 2.*

Как известно, длина дуги $l[a,b]$ графика функции $x \in L^1[a,b]$ дается формулой $l[a,b] = \int\limits_a^b \sqrt{1+x'(t)^2}dt$. Ясно, что для функции $\Phi_0(t) = \sqrt{1+t^2}$ имеет место включение $\Phi_0 \in W$. Поэтому, полагая $\Phi = \Phi_0$, $k = 1$, $p = \infty$ во второй части теоремы 2, и замечая, что $\tau_1 = h/2$, получаем такое следствие.

Следствие 2. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, A_0, $h > 0$, $\lambda = \pi/h$, $[a,b] \subset \mathbf{R}$. Тогда среди всех сплайнов $s \in \sigma_{h,r}$, удовлетворяющих условию $\|s\|_\infty \le A_0$, наибольшую длину дуги на отрезке $[a,b]$ имеет график сплайна $\varphi(t) = A_0 \cdot \varphi_{\lambda,r-k}(t+\tau+h/2)$, где τ такое же, как в теореме 2.*

Библиографические ссылки

1. *Pinkus A.* Variations on the Chebyshev and L^q-Theories of Best Approximation / A. Pinkus, O. Shisha // Journal of Approx. Theory, 1982. — Т. 35, № 2. — С. 148–168.
2. *Кофанов В. А.* Точные верхние грани норм функций и их производных на классах функций с заданной функцией сравнения / В. А. Кофанов // Укр. мат. журн., 2011. — Т. 63, № 7. — С. 969–984.
3. *Bojanov B.* An extension of the Landau-Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdös / B. Bojanov, N. Naidenov // Journal d'Analyse Mathematique, 1999. — Vol. 78. — P. 263–280.
4. *Erdös P.* Open problems /P. Erdös // In: Open Problems in Approximation Theory (B. Bojanov, Ed.), SCT Publishing, Singapur, 1994. — P. 238–242.
5. *Магарил-Ильяев Г. Г.* О наилучших приближениях сплайнами функциональных классов на оси /Г. Г. Магарил-Ильяев // Труды матем. ин-та им. Стеклова, 1992. — 194. — С. 153–154.
6. *Кофанов В. А.* О некоторых экстремальных задачах разных метрик для дифференцируемых функций на оси /В. А. Кофанов // Укр. мат. журн., 2009. —Т. 61, № 6. — С. 765–776.
7. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале /А. Н. Колмогоров // Избр. труды. Математика, механика, М., 2003. — С. 252–263.
8. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений /В. М. Тихомиров // Успехи мат. наук., 1960. —Т. 15, № 3. — С. 81–120.

Надійшла до редколегії 13.01.2013