

УДК 517.5

Поточкові оцінки односторонніх наближень одного класу сингулярних інтегралів

А. М. Пасько*, О. О. Колесник**

* Дніпропетровський Національний Університет ім. Олеся Гончара, Дніпропетровськ 49050. E-mail: pasko08@meta.ua

** Дніпропетровський Національний Університет ім. Олеся Гончара, Дніпропетровськ 49050. E-mail: alexey.kolesnik1@gmail.com

Знайдена оцінка наближення класу \check{W}_∞^r , $r \geq 1$ з урахуванням розташування точки на відрізьку .

Ключові слова: модуль неперервності, алгебраїчний поліном, найкраще наближення.

Найдена оцінка приближення класу \check{W}_∞^r , $r \geq 1$ с учётом положения точки на отрезке.

Ключевые слова: модуль непрерывности, алгебраический полином, наилучшее приближение.

The pointwise estimation of the approximation to the class \check{W}_∞^r , $r \geq 1$ by algebraic polynomials is established.

Key words: module of continuity, algebraic polynomial, the best approximation.

Нехай W_∞^r , $r > 0$, – клас функцій $f_r(x)$, визначених на відрізьку $[-1; 1]$ рівністю

$$f_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} f(t) dt + P(x),$$

де $\Gamma(r)$ – гама-функція Ейлера, функція $f(t)$ вимірна та $|f(t)| \leq 1$ майже скрізь, $P(x)$ – алгебраїчний поліном степені не вище $[r-1]$ ($[a]$ – ціла частина a).

Через \check{W}_∞^r , позначається клас функцій $S_\rho(f)$, які можна подати у вигляді сингулярного інтеграла який розуміється в сенсі головного значення,

$$S(f)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-x} \sqrt{(1-t^2)} dt,$$

де $x \in (-1; 1)$, $f \in W_\infty^r$.

В. П. Моторний у роботі [1] встановив наступну оцінку.

Теорема 1. Для довільного числа $r > 0$ та довільної функції $f \in \check{W}_\infty^r$ існує послідовність алгебраїчних поліномів $P_n(x)$, $n \geq r + 1$, така, що

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\tilde{K}_r}{n^r} (\sqrt{1-x^2})^{r+1} + C_r \left(\frac{\ln n}{n^{r+1}} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^r \right),$$

де величина C_r залежить тільки від r .

Основним результатом даної роботи є наступний аналог теореми 1 для випадку односторонніх наближень.

Теорема 2. Для довільного числа $r \geq 1$ та довільної функції $f \in \check{W}_\infty^r$ існує послідовність алгебраїчних поліномів $P_{n,r}^+(x) : \forall x \in [-1; 1]$

$$0 \leq P_{n,r}^+(x) - f(x) \leq \frac{2\tilde{K}_r}{n^r} (\sqrt{1-x^2})^{r+1} + C_r \left(\frac{1}{n^{r+\{r\}}} (\sqrt{1-x^2})^{[r]+1} + \frac{\ln n}{n^{r+1}} \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2} \right)^r \right), \quad (1)$$

якщо $[r]$ – непарне, та

$$0 \leq P_{n,r}^+(x) - f(x) \leq \frac{2\tilde{K}_r}{n^r} (\sqrt{1-x^2})^{r+1} + C_r \left(\frac{\ln n}{n^{r+1}} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^r + \frac{(\sqrt{1-x^2})^{[r]}}{n^{r+\{r\}}} \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2} \right) \right), \quad (2)$$

якщо $[r]$ – парне. Тут $\{r\}$ означає дробову частину числа r .

Для доведення теореми 2 нам будуть потрібні наступні три леми.

Лема 1. Нехай β – довільна стала, $\beta > 0$, ω – модуль неперервності. Тоді $\forall n \in \mathbb{N}$ існує алгебраїчний поліном $q_n(x)$ степеня не вищого за n , $\forall x \in [-1; 1]$

$$\left| \omega \left(\frac{\beta}{n} \sqrt{1-x^2} \right) - q_n(x) \right| \leq C \omega \left(\frac{1}{n^2} \right), \quad (3)$$

де C залежить тільки від β .

Лема 2. Нехай β – довільна стала, $\beta > 0$, ω – модуль неперервності. Тоді $\forall n \in \mathbb{N}$ існує алгебраїчний поліном $q_n(x)$ степеня не вищого за n , $\forall x \in [-1; 1]$

$$0 \leq q_n(x) - \sqrt{1-x^2} \omega \left(\frac{\beta}{n} \sqrt{1-x^2} \right) \leq C \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right) \omega \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

де C залежить тільки від β .

Лема 3. Нехай $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0; 1]$. Для довільного натурального $n \geq 4m$ існує алгебраїчний поліном $H_{n,m}^+(x)$ степеня не вищого за n , що задовольняє нерівності

$$0 \leq H_{n,m}^+(x) - \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2} \right)^{m+\alpha} \leq \frac{C_m}{n^\alpha} \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2} \right)^m.$$

Лема 1 та 3 доведені в [2].

Лема 2 доведена в [3].

Доведення теореми 2. Нерівність (3) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} 0 \leq P_{n,r}^+(x) - f(x) &\leq \frac{\tilde{K}_r}{n^r} (\sqrt{1-x^2})^{r+1} + \\ &+ C_r \frac{\ln n}{n^{r+1}} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^r \leq \frac{2\tilde{K}_r}{n^r} (\sqrt{1-x^2})^{r+1} + \\ &+ C_r \frac{\ln n}{n^{r+1}} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^r. \end{aligned} \quad (4)$$

Покладемо $r = m + \alpha$, $m \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in (0; 1]$ (за нецілого r $m = [r]$, $\alpha = \{r\}$).

Нехай m – непарне. Застосувавши лему 1 до модуля неперервності $\omega(t) = t^\alpha$ отримаємо, що існує послідовність алгебраїчних поліномів $q_n^+(x)$:

$$0 \leq q_n^+(x) - \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^\alpha \leq \frac{C}{n^{2\alpha}}. \quad (5)$$

З леми 3 випливає, що

$$0 \leq H_{n,m}^+(x) - \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2} \right)^{m+\alpha} \leq \frac{C_m}{n^\alpha} \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2} \right)^m. \quad (6)$$

Додавши нерівність (4) з помноженою на $\frac{\tilde{K}_r}{n^m} (\sqrt{1-x^2})^{m+1}$ нерівністю (5) та помноженою на $C_r \frac{\ln n}{n^{r+1}}$ нерівністю (6) та виконавши нескладні перетворення отримаємо нерівність (1).

Нехай m – парне. Застосувавши лему 2 до модуля неперервності $\omega(t) = t^\alpha$ отримаємо, що існує послідовність поліномів q_n^+ :

$$0 \leq q_n^+(x) - \sqrt{1-x^2} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^\alpha \leq C \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n^{2\alpha}}. \quad (7)$$

Додавши нерівність (4) з помноженою на $K_r n^{-m} (\sqrt{1-x^2})^m$ нерівністю (7) та помноженою на $C_r \frac{\ln n}{n^{r+1}}$ нерівністю (6) та виконавши нескладні перетворення отримаємо (2). Теорема доведена.

Бібліографічні посилання

1. **Моторный В. П.** Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами. / В. П. Моторный // Укр. мат. журнал. – 2001. – 53, №3. – С. 331–345.
2. **Пасько А. Н.** Наилучшее одностороннее приближение классов WH^ω с учётом положения точки на отрезке. / А. Н. Пасько // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія «Математика». – 2005. – Вип. 10. – С. 86–91.
3. **Пасько А. Н.** Одностороннее приближение функций с учётом положения точки на отрезке. / А. Н. Пасько // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія «Математика». – 2009. – Вип. 14. – С. 99–102.

Надійшла до редколегії 05.03.2013