ISSN 9125 0912. *Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2012, вип.* **17**

УДК 517.5

Приближение неограниченных функционалов ограниченными в гильбертовом пространстве

В. Ф. Бабенко*, Р. О. Биличенко**

* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. *E-mail: babenko.vladislav@gmail.com*

** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. *E-mail: bilichenkoroma@rambler.ru*

Знайдено величину найкращого наближення функцiонала $F_f(x) = (A^k x, f)$ на класi $\{x \in D(A^r) : \|A^r x\| \le 1\}$ лiнiйними обмеженими функцiоналами (A – самоспряжений оператор у гiльбертовому просторi H, $f \in H$, $k < r$).

Ключовi слова: функцiонал, самоспряжений оператор, гiльбертiв простiр.

Найдена величина наилучшего приближения функционала $F_f(x) = (A^k x, f)$ на классе $\{x \in D(A^r) : \|A^r x\| \le 1\}$ линейными ограниченными функционалами (A – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, $f \in H$, $k < r$).

Ключевые слова: функционал, самосопряженный оператор, гильбертово пространство.

The best approximation of unbounded functional $F_f(x) = (A^k x, f)$ on the class $\{x \in D(A^r) : \|A^r x\| \le 1\}$ by linear bounded functionals (A – is a self-adjoint operator in the Hilber space H, $f \in H$, $k < r$).

Key words: functional, self-adjoint operator, Hilbert space.

1. Введение

В исследованиях С.Б. Стечкина 1965 года появилась задача приближения неограниченного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов банахова пространства. Так в [7] он использовал такого рода аппроксимативные соображения для доказательства неравенств типа Колмогорова. В [8] 1967 года дана постановка задачи, приведены первые принципиальные результаты и дано решение задачи для операторов дифференцирования малого порядка Эта задача активно изучалась многими математиками. Обзор многих полученных результатов и дальнейшие ссылки можно найти в [1, 2] (см. также [6, гл. 7]).

Отметим, что можно рассматривать задачу наилучшего приближения на классах элементов ограниченного оператора операторами с меньшей нормой.

Через $L^r_{2,2}(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, обозначим пространство функций $x \in L_2(\mathbb{R})$, ($r - 1$) - я производная которых локально абсолютно непрерывна и r-я производная принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$.

В 1968 году Л.В. Тайков [9] рассмотрел задачу Стечкина для оператора дифференцирования в следующей ситуации. Для $x \in L^r_{2,2}(\mathbb{R})$, $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$ и числа $N > 0$, положим

$$u_N = \inf_{\|T\| \le N} \sup_{\|x^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \le 1} \left\| x^{(k)} - T(x) \right\|_{C(\mathbb{R})}, \tag{1.1}$$

где $\inf\limits_{\|T\| \le N}$ берется по всевозможным линейным операторам $T : L_2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ с нормой, не превосходящей N ($C(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных ограниченных функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Задача состоит в вычислении величины u_N и нахождении экстремального оператора, на котором в (1.1) достигается нижняя грань (такой оператор естественно называть наилучшей формулой численного дифференцирования).

Тайков установил, что для заданного числа $N = ah^{-k-1/2}$, $h > 0$, где

$$a = \left\{ \frac{r - k - 1/2}{2r^2} \frac{1}{\sin \pi \frac{2k+1}{2r}} \right\}^{1/2},$$

справедливо равенство $u_N = bh^{r-k-1/2}$, где

$$b = \left\{ \frac{k + 1/2}{2r^2} \frac{1}{\sin \pi \frac{2k+1}{2r}} \right\}^{1/2}.$$

Заметим, что эта задача эквивалентна задаче приближения неограниченного функционала $x^{(k)}(0)$ на классе $\{x \in L^r_{2,2}(\mathbb{R}) : \|x^{(r)}\| \le 1\}$ ограниченными функционалами.

Там же Тайковым получены неулучшаемые неравенства, оценивающие для $x \in L^r_{2,2}(\mathbb{R})$ равномерную норму k-й производной, $0 < k < r$, через L_2 – нормы x и $x^{(r)}$ в аддитивной и мультипликативной формах. Приведем это неравенство в аддитивной форме. Для любого $h > 0$

$$\|x^{(k)}\|_{C(\mathbb{R})} \le ah^{-k-1/2} \|x\|_{L_2(\mathbb{R})} + bh^{r-k-1/2} \|x^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{1.2}$$

Впоследствии А.Ю. Шадрин [10] получил аналог неравенства Тайкова для переодических функций.

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, A — линейный самосопряженный оператор в H, $D(A)$ — область его определения, $Q = \{x \in D(A^r) \ : \|A^r x\| \le 1\}$ для $r \in \mathbb{N}$. Для $f \in H$ и $k \in \mathbb{N},\ k < r$ положим $F_f(x) := (A^k x, f),\ x \in D(A^r))$.

В [4] нами доказано, что для любого $x \in D(A^r)$ и любого $\tau > 0$ справедливо точное неравенство

$$\left| (A^k x, f) \right| \le \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{1 + \tau t^{2r}} \, d\,(E_t f, f) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \|x\|^2 + \tau \left\| A^r x \right\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.3}$$

а также показано, что в из неравенства (1.3) следует неравенство Тайкова (1.2). Здесь E_t — разложение единицы, соответствующее самосопряженному оператору A.

В данной заметке получено (теорема 1) решение задачи наилучшего приближения функционала F_f на классе Q линейными ограниченными функционалами, т. е. задачи отыскания величины

$$U_N := \inf_{g\in H,\|g\|\leq N} \sup_{x\in Q} |F_f(x) - g(x)|, \quad N > 0.$$

а также (теорема 2) точное аддитивное неравенство типа (1.2), оценивающее $|F_f(x)|$ через $\|x\|$ и $\|A^r x\|$.

2. Предварительные сведения

Приведем некоторые сведения из спектральной теории самосопряженных операторов, которые можно найти, например, в [3, §§75, 88].

Разложением единицы называется однопараметрическое семейство проектирующих операторов $E_t : H \to H$, заданное в конечном или бесконечном интервале $[\alpha, \beta]$ (если интервал $[\alpha, \beta]$ бесконечен, то, по определению, принимается $E_{-\infty} = \lim\limits_{t\to-\infty} E_t$, $E_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} E_t$, в смысле сильной сходимости) и удовлетворяющее следующим условиям:

a) $E_u E_v = E_s \ \forall u, v \in [\alpha, \beta]$, где $s = \min\{u, v\}$;

b) в смысле сильной сходимости $E_{t-0} = E_t \quad (\alpha < t < \beta)$;

c) $E_\alpha = 0, E_\beta = I$ (I — тождественный оператор: $Ix = x \ \forall x \in H$).

Полагаем $E_t = 0$ при $t \leq \alpha$ и $E_t = I$ при $t \geq \beta$.

Из определения следует, что для любого $x \in H$ функция

$$\sigma(t) = (E_t x, x), \qquad \infty < t < \infty,$$

является непрерывной слева, неубывающей функцией ограниченной вариации, для которой $\sigma(\alpha) = 0, \ \ \sigma(\beta) = (x, x)$.

Согласно спектральной теореме каждому самосопряженному оператору A соответствует разложение единицы E_t, $t \in \mathbb{R}$, такое, что имеет место равенство

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} t \, dE_t.$$

Приведенный здесь интеграл – это операторный интеграл Стилтьеса (см., например, [3, §72]). По поводу определения и свойств операторных интегралов см. также [5, гл. 13, §1,2]. Вектор x принадлежит $D(A)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \, d\,(E_t x, x) < \infty,$$

и если $x \in D(A)$, то

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} t\, dE_t x, \quad \|Ax\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2\, d\,(E_t x, x) < \infty.$$

Для $x \in D(A^k)$, $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k x = \int_{-\infty}^{\infty} t^k\, dE_t x, \quad \left\|A^k x\right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k}\, d\,(E_t x, x)\,. \tag{2.1}$$

Используя спектральное разложение (2.1), для $x \in D\,(A^r)$ и $f \in H$ можем записать

$$F_f(x) = (A^k x, f) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} t^k\, dE_t x, f \right) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k\, d\,(E_t x, f)\,. \tag{2.2}$$

3. Основные результаты

Для оператора A, соответствующего ему разложения единицы E_t и заданного элемента $f \in H$ определим функцию $\Phi(h)$, $h > 0$ следующим образом

$$\Phi(h) := \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(1 + ht^{2r})^2} d\,(E_t f, f) \right\}^{1/2}.$$

Как нетрудно проверить, эта функция обладает следующими свойствами. Она непрерывно зависит от h и с ростом h строго монотонно убывает, причем $\Phi(h) \to 0$, если $h \to \infty$. Далее, если оператор A ограничен, то $\Phi(h) \to \|A^k f\|$ при $h \to 0$. Если оператор A неограничен, и $f \in D(A^k)$, то снова при $h \to 0$ получаем $\Phi(h) \to \|A^k f\|$. Если же $f \notin D(A^k)$, то $\Phi(h) \to \infty$ при $h \to 0$.

Таким образом, для любого N, $0 < N < \|A^k f\|$ ($0 < N < \infty$, если оператор A неограничен и $f \notin D(A^k)$) уравнение относительно h

$$N = \Phi(h) \tag{3.1}$$

имеет единственное решение.

Положим также

$$\Psi(h) := \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2(r+k)}}{(1 + ht^{2r})^2} d\,(E_t f, f) \right\}^{1/2}.$$

Нами доказаны следующие две теоремы

Теорема 1. *Пусть $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, A – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, $f \in H$, числа N и $h > 0$ связаны соотношением (3.1). Тогда справедливо равенство*

$$u_N = \inf_{g \in H, \|g\| \le N} \sup_{x \in Q} |F_f(x) - g(x)| = h\Psi(h). \tag{3.2}$$

Теорема 2. *Пусть $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, A – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, $f \in H$. Тогда для любого $x \in D(A^r)$ и для любого $h > 0$ справедливо неравенство*

$$\left|\left(A^k x, f\right)\right| \le h\Psi(h)\,\|A^r x\| + \Phi(h)\|x\|. \tag{3.3}$$

Неравенство (3.3) обращается в равенство для элемента

$$x_h = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^k}{1 + ht^{2r}}\, dE_t f. \tag{3.4}$$

Доказательство теоремы 1. Сначала оценим сверху величину U_N.

В качестве приближающего рассмотрим функционал

$$g_h(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^k}{1 + ht^{2r}} d\left(E_t x, f\right).$$

Покажем, что $\|g_h\| \le N$. Действительно

$$|g_h(x)| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^k}{1 + ht^{2r}} d\left(E_t x, f\right)\right| \le$$

$$\le \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(1 + ht^{2r})^2} d\left(E_t f, f\right)\right\}^{1/2} \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\left(E_t x, x\right)\right\}^{1/2} = \Phi(h)\|x\| = N\|x\|.$$

Если $x \in Q$, то, учитывая (2.2), получим

$$u_N \le |F_f(x) - g_h(x)| = \left|\left(A^k x, f\right) - g_h(x)\right| = h\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{r+k}}{1 + ht^{2r}} \cdot t^r\, d\left(E_t x, f\right)\right| \le$$

$$\le h\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2(r+k)}}{(1 + ht^{2r})^2}\, d\left(E_t f, f\right)\right\}^{1/2} \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{2r}\, d\left(E_t x, x\right)\right\}^{1/2} = h\Psi(h)\,\|A^r x\| \le h\Psi(h).$$

Таким образом, оценка сверху для величины U_N получена. Прежде, чем доказывать точность этой оценки, докажем теорему 2.

Доказательство теоремы 2. Для любого $x \in D(A^r)$ и любого $N > 0$ имеет место неравенство
$$|F_f(x)| \le u_N \|A^r x\| + N\|x\|. \tag{3.5}$$
Учитывая полученную выше оценку для u_N для h такого, что $N = \Phi(h)$, получаем
$$|F_f(x)| = \left|\left(A^k x, f\right)\right| \le h\Psi(h)\, \|A^r x\| + \Phi(h)\|x\|.$$
Т. е. для любого $h > 0$ и любого $x \in D(A^r)$ справедливо неравенство (3.3).

Покажем, что неравенство (3.3) является точным в том смысле, что для элемента $x_h \in D\left(A^r\right)$, определенного равенством (3.4), в (3.3) имеет место знак равенства.

Очевидно, что для x_h
$$\|x_h\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\left(1+ht^{2r}\right)^2}\, d\left(E_t f, f\right). \tag{3.6}$$

Кроме того для $k, r \in \mathbb{N}$ имеют место равенства:
$$A^k x_h = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{1+ht^{2r}}\, dE_t f, \tag{3.7}$$

$$A^r x_h = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{r+k}}{1+ht^{2r}}\, dE_t f. \tag{3.8}$$
Из (3.8) следует равенство
$$\|A^r x_h\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2(r+k)}}{\left(1+ht^{2r}\right)^2}\, d\left(E_t f, f\right). \tag{3.9}$$
Из (2.2) и (3.7) следует, что
$$\left(A^k x_h, f\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{1+ht^{2r}} d\left(E_t f, f\right). \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10), (3.6) и (3.9) в (3.3), получим верное равенство. Точность неравенства (3.3) доказана и знак равенства в (3.3) достигается на элементе x_h, определенном в (3.4).

Вернемся к доказательству того, что
$$u_N = h\Psi(h).$$

Для элемента $y_h = \dfrac{x_h}{\|A^r x_h\|}$ неравенство (3.3) обращается в равенство

$$|F_f(y_h)| = h\Psi(h) + \Phi(h)\|y_h\|,$$

а неравенство (3.5) в случае $N = \Phi(h)$ принимает вид

$$|F_f(y_h)| \le u_N + \Phi(h)\|y_h\|.$$

Сопоставляя эти неравенства, получаем

$$u_N \ge h\Psi(h).$$

Замечание. Отметим, что из теоремы 1 вытекает следующая оценка сверху для величины u_N. Перепишем правую часть (3.2) в виде

$$h\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2(r+k)}}{(1+ht^{2r})^2} d\,(E_t f, f)\right\}^{1/2} = \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2(r+k)}}{(t^{2r}+\frac{1}{h})^2} d\,(E_t f, f)\right\}^{1/2}.$$

Как легко проверить

$$\max_t \frac{t^{2(r+k)}}{(t^{2r}+\frac{1}{h})^2} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{k}{r}\right)^{1+\frac{k}{r}} \left(1-\frac{k}{r}\right)^{1-\frac{k}{r}} \cdot h^{1-\frac{k}{r}}$$

и, таким образом, для u_N получаем оценку

$$u_N \le \max_t \frac{t^{2(r+k)}}{(t^{2r}+\frac{1}{h})^2} \cdot \|f\| = \frac{1}{4}\left(1+\frac{k}{r}\right)^{1+\frac{k}{r}} \left(1-\frac{k}{r}\right)^{1-\frac{k}{r}} \cdot h^{1-\frac{k}{r}} \cdot \|f\|.$$

Следовательно

$$u_N \le \frac{1}{4}\left(1+\frac{k}{r}\right)^{1+\frac{k}{r}} \left(1-\frac{k}{r}\right)^{1-\frac{k}{r}} \cdot h^{1-\frac{k}{r}}\|f\|.$$

Библиографические ссылки

1. *Арестов В. В.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными / В. В. Арестов, В. Н. Габушин // Изв. ВУЗов. Матем., 1995. — № 11. — С. 44–66.
2. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи / В. В. Арестов // Успехи математических наук, 1996. — Т. 51, № 6 — С. 89–124.
3. *Ахиезер Н. И.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. – М., 1966. — 544 с.

4. *Бабенко В. Ф.* Неравенства типа Тайкова для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / В. Ф. Бабенко, Р. О. Биличенко // Труды ИПММ, 2010. — Т. 21 — С. 11–18.
5. *Березанский Ю. М.* Функциональный анализ / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. – Киев, 1990. — 600 с.
6. *Н*еравенства для производных и их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов. – Киев, 2003. — 590 с.
7. *Стечкин С. Б.* Неравенства между нормами производных произвольной функции / С. Б. Стечкин // Acta scient. math. —1965. — 26. — С. 225–230.
8. *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов / С. Б. Стечкин // Матем. заметки, 1967. — Т. 1, № 2. — С. 137–148.
9. *Тайков Л. В.* Неравенства типа Колмогорова и формулы численного дифференцирования / Л.В. Тайков // Матем. заметки, 1968. — Т. 4, № 2. — С. 223–238.
10. *Шадрин А. Ю.* Неравенства типа Колмогорова и оценки сплайн – интерполяции для периодических классов W_2^m / А.Ю. Шадрин // Матем. заметки, 1990. — Т. 48, № 4. — С. 132–139.

Надійшло до редколегії 11.05.2012