ISSN 9125 0912. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2012, вип.* **17**

УДК 517.5

Теоремы сравнения производных и некоторые их приложения

В. Ф. Бабенко, О. В. Коваленко

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050.
E-mail: babenko.vladislav@gmail.com E-mail: olegkovalenko90@gmail.com

Отримано аналоги теореми порівняння Колмогорова та вказано деякі їх застосування.

Ключові слова: Теорема порівняння, нерівності для похідних.

Получены аналоги теорем сравнения Колмогорова и указаны их некоторые приложения.

Ключевые слова: Теорема сравнения, неравенства для производных.

Analogues of Kolmogorov comparison theorems and some of their applicatons were established.

Key words: Comparison theorems, inequalities for derivatives.

1. Обозначения. Постановка задачи. Известные результаты

Через $L_\infty(\mathbb{R})$ будем обозначать пространство измеримых и существенно ограниченных функций $x\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \operatorname{ess\,sup}\left\{|x(t)| : t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Для натурального r через $L^r_\infty(\mathbb{R})$ обозначим пространство функций $x\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таких, что производная $x^{(r-1)}$, $x^{(0)}=x$, локально абсолютно непрерывна, и $x^{(r)}\in L_\infty(\mathbb{R})$. Пусть также $L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}) := L^r_\infty(\mathbb{R})\bigcap L_\infty(\mathbb{R})$.

Для $r\in\mathbb{N}$ через $\varphi_r(t)$ будем обозначать сплайн Эйлера порядка r (т. е. r-ю периодическую первообразную функции $\operatorname{sgn}\sin t$ со средним значением нуль на периоде). Для $\lambda>0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$.

Для доказательства своего знаменитого неравенства [1–3] Колмогоровым было доказано утверждение, известное как теорема сравнения.

Теорема А. *Пусть $r\in\mathbb{N}$ и задана функция $x\in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$. Пусть числа $a\in\mathbb{R}$ и $\lambda>0$ таковы, что*

$$\|x^{(k)}\| \le \|a\varphi^{(k)}_{\lambda,r}\|,\ k\in\{0,r\}.$$

Если точки $\xi,\eta\in\mathbb{R}$ таковы, что $x(\xi)=a\varphi_{\lambda,r}(\eta)$, то

$$|x'(\xi)| \le |a|\cdot|\varphi'_{\lambda,r}(\eta)|.$$

Как сама теорема сравнения Колмогорова, так и метод её доказательства сыграли большую роль при точном решении многих экстремальных задач теории приближений [4–7].

В следующем параграфе мы введем семейство сплайнов, которые в дальнейшем будут играть роль сплайнов Эйлера в теореме A, и изучим некоторые их свойства. В параграфе 3 мы докажем три аналога теоремы сравнения Колмогорова для случаев, когда заданы норма функции и нормы ее производных порядков $r-1$ и r; норма функции и нормы её производных порядков $r-2$ и r; норма функции и нормы ее производных порядков $r-2$, $r-1$ и r. В параграфе 4 мы приведем некоторые приложения полученных теорем сравнения.

2. Функции сравнения и их свойства

Пусть $a_1, a_2 \geq 0$. Положим $T := a_1 + a_2 + 2$. Определим функцию $\psi_1(a_1, a_2; t)$ следующим образом. На отрезке $[0, T]$ положим

$$\psi_1(a_1, a_2; t) := \begin{cases} 0, & t \in [0, a_1], \\ t - a_1, & t \in [a_1, a_1 + 1], \\ 1, & t \in [a_1 + 1, a_1 + a_2 + 1], \\ 2 + a_1 + a_2 - t, & t \in [a_1 + a_2 + 1, T]. \end{cases}$$

Продолжим функцию $\psi_1(a_1, a_2; t)$ на отрезок $[T, 2 \cdot T]$ равенством

$$\psi_1(a_1, a_2; t) = -\psi_1(a_1, a_2; t - T),\ t \in [T, 2 \cdot T] \tag{2.1}$$

а затем периодически с периодом $2 \cdot T$ на всю ось.

Заметим, что $\psi_1(a_1, a_2; t) \in L^1_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$. Для $r \in \mathbb{N}$ обозначим через $\psi_r(a_1, a_2; t)$ $(r-1)$-ю $2 \cdot T$ – периодическую первообразную функции $\psi_1(a_1, a_2; t)$ с нулевым средним на периоде (так что, в частности, $\psi_r'(a_1, a_2; t) = \psi_{r-1}(a_1, a_2; t)$). Функции $\psi_r(a_1, a_2; t)$ впервые рассматривал Родов [8].

Приведем некоторые свойства функции $\psi_r(a_1, a_2; t)$, $r \in \mathbb{N}$, которые нетрудно установить либо непосредственно, либо по аналогии со свойствами эйлеровых идеальных сплайнов φ_r (см., например, [4, гл. 5; 5, гл. 3]). Отметим, что функция ψ_r имеет период $2 \cdot T$ и для всех $r \geq 1$

$$\psi_r(a_1, a_2; t) = -\psi_r(a_1, a_2; t - T),\ t \in [T, 2 \cdot T].$$

Кроме того функция $\psi_2(a_1, a_2; t)$ имеет ровно два нуля на периоде – точки $a_1 + \frac{a_2}{2} + 1$ и $2a_1 + \frac{3a_2}{2} + 3$. Следовательно, функция $\psi_r(a_1, a_2; t)$ при $r \geq 2$ также имеет ровно два нуля на периоде: для любого $k \in \mathbb{N}$:

$$\psi_{2k+1}(a_1, a_2; 0) = \psi_{2k+1}(a_1, a_2; a_1 + a_2 + 2) = 0, \tag{2.2}$$

$$\psi_{2k}\left(a_1, a_2; a_1 + \frac{a_2}{2} + 1\right) = \psi_{2k}\left(a_1, a_2; 2a_1 + \frac{3a_2}{2} + 3\right) = 0. \tag{2.3}$$

Отметим, что при $a_1 = 0$ равенство (3) справедливо и для $k = 0$.

Отсюда, в свою очередь, следует, что при $r \geq 3$ (а в случае, когда $a_1 = 0$ для $r \geq 2$) функция $\psi_r(a_1, a_2; t)$ строго монотонна между нулями своей производной, а график функции $\psi_r(a_1, a_2; t)$ является выпуклым на каждом промежутке знакопостоянства. Кроме того, как легко видеть, график $\psi_r(a_1, a_2; t)$ симметричен относительно ее нулей, а также относительно прямых вида $t = t_0$, где t_0 – нуль $\psi'_r(a_1, a_2; t)$. Наконец отметим, что $\psi_r(0, 0; t) = \varphi_{\pi/2,r}(t)$.

Для $r \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2 \geq 0$, $\lambda > 0$ и $b \in \mathbb{R}$ положим

$$\Psi_{a_1,a_2,b,\lambda}(t) = \Psi_{r;a_1,a_2,b,\lambda}(t) :=$$

$$= b\left(\frac{\lambda}{2a_1 + 2a_2 + 4}\right)^r \psi_r\left(a_1, a_2; \frac{2a_1 + 2a_2 + 4}{\lambda}t\right).$$

Отметим, что функция $\Psi_{a_1,a_2,b,\lambda}(t)$ является λ – периодической.

Теорема 1. *Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$. Тогда:*

a) существуют $a_2 \geq 0$, $\lambda > 0$ и $b \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\left\|\Psi^{(s)}_{0,a_2,b,\lambda}\right\| = \left\|x^{(s)}\right\|, \ s \in \{0, r-1, r\};$$

b) существуют $a_1 \geq 0$, $\lambda > 0$ и $b \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\left\|\Psi^{(s)}_{a_1,0,b,\lambda}\right\| = \left\|x^{(s)}\right\|, \ s \in \{0, r-2, r\};$$

c) существуют $a_1, a_2 \geq 0$, $\lambda > 0$ и $b \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\left\|\Psi^{(s)}_{a_1,a_2,b,\lambda}\right\| = \left\|x^{(s)}\right\|, \ s \in \{0, r-1, r-2, r\}.$$

Справедливость теоремы 1, по сути, следует из теоремы сравнения Колмогорова. Докажем утверждение a), остальные утверждения доказываются аналогично.

Ясно, что $\Psi_{0,0,b,\lambda}(t) = b\left(\frac{\lambda}{4}\right)^r \varphi_{\pi/2}(\frac{4}{\lambda}t)$. Следовательно, параметры b и λ можно выбрать так, чтобы $\left\|\Psi^{(s)}_{0,0,b,\lambda}\right\| = \left\|x^{(s)}\right\|$, $s = r-1, r$. Тогда из теоремы А будет следовать, что $\|\Psi_{0,0,b,\lambda}\| \leq \|x\|$. При возрастании параметра a_2 $\|\Psi_{0,a_2,b,\lambda}\|$ будет непрерывно изменяясь возрастать от $\|\Psi_{0,0,b,\lambda}\|$ до ∞, а $\left\|\Psi^{(s)}_{0,a_2,b,\lambda}\right\|$, $s = r-1, r$ будут оставаться неизменными. Поэтому, можно выбрать параметр a_2 так, чтобы $\left\|\Psi^{(s)}_{0,a_2,b,\lambda}\right\| = \left\|x^{(s)}\right\|$, $s = 0, r-1, r$.

3. Теоремы сравнения

Следующая теорема содержит в себе три аналога теоремы сравнения Колмогорова.

Теорема 2. *Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$. Пусть выполняется одно из следующих условий:*

a) Числа $a_1 = 0$, $a_2 \geq 0$, $\lambda > 0$ и $b \neq 0$ таковы, что

$$\left\|x^{(k)}\right\| \leq \left\|\Psi^{(k)}_{a_1,a_2,b,\lambda}\right\|, \; k \in \{0, r-1, r\}; \tag{3.1}$$

b) Числа $a_1 \geq 0$, $a_2 = 0$, $\lambda > 0$ и $b \neq 0$ таковы, что

$$\left\|x^{(k)}\right\| \leq \left\|\Psi^{(k)}_{a_1,a_2,b,\lambda}\right\|, \; k \in \{0, r-2, r\}; \tag{3.2}$$

c) Числа $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $\lambda > 0$ и $b \neq 0$ таковы, что

$$\left\|x^{(k)}\right\| \leq \left\|\Psi^{(k)}_{a_1,a_2,b,\lambda}\right\|, \; k \in \{0, r-1, r-2, r\}. \tag{3.3}$$

Если точки τ и ξ таковы, что $x(\tau) = \Psi_{a_1,a_2,b,\lambda}(\xi)$, то

$$|x'(\tau)| \leq \left|\Psi'_{a_1,a_2,b,\lambda}(\xi)\right|. \tag{3.4}$$

Доказательство. Для сокращения записей в ходе данного доказательства мы будем писать $\Psi(t)$ вместо $\Psi_{a_1,a_2,b,\lambda}(t)$. Рассматривая при необходимости функцию $-x(t)$ вместо функции $x(t)$ и функцию $-\Psi(t)$ вместо $\Psi(t)$, мы можем считать, что $x'(\tau) > 0$ и

$$\Psi'(\tau) > 0. \tag{3.5}$$

Кроме того, рассматривая подходящий сдвиг $\Psi(\cdot + \alpha)$ функции Ψ можем считать, что и $\tau = \xi$, т. е.

$$x(\tau) = \Psi(\tau). \tag{3.6}$$

Предположим, что (3.6) имеет место, но при этом вместо неравенства (3.4) (с $\xi = \tau$) имеет место неравенство

$$|x'(\tau)| > |\Psi'(\tau)|.$$

Обозначим через (τ_1, τ_2) наименьший интервал монотонности Ψ, содержащий точку τ и такой, что $\Psi'(\tau_1) = \Psi'(\tau_2) = 0$. В силу сделанного предположения существует число $\delta > 0$ такое, что $x'(t) > \Psi'(t)$ для всех $t \in (\tau - \delta, \tau + \delta)$, а значит, в силу (3.6) $x(\tau + \delta) > \Psi(\tau + \delta)$ и $x(\tau - \delta) < \Psi(\tau - \delta)$.

Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы для функции $x_\varepsilon(t) := (1 - \varepsilon)x(t)$ выполнялись неравенства $x_\varepsilon(\tau + \delta) > \Psi(\tau + \delta)$ и $x_\varepsilon(\tau - \delta) < \Psi(\tau - \delta)$. В силу одного из соотношений (3.1) – (3.3) и (3.5) будет

$$x_\varepsilon(\tau_1) > \Psi(\tau_1), \;\; x_\varepsilon(\tau_2) < \Psi(\tau_2).$$

Таким образом на промежутке (τ_1, τ_2) разность $\Delta_\varepsilon(t) := x_\varepsilon(t) - \Psi(t)$ будет иметь не менее трёх перемен знака.

Как легко видеть, существует последовательность функций $\mu_N \in C^\infty(\mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N}$, со следующими свойствами:

1. $\mu_N(t) = 1$ на промежутке $[\tau_1, \tau_2]$; $\|\mu_N\| = 1$;
2. $\mu_N(t) = 0$ для всех t вне промежутка $[\tau_1 - N \cdot \frac{\lambda}{2}; \tau_1 + N \cdot \frac{\lambda}{2}]$ (где, как и ранее, $T = a_1 + a_2 + 2$);
3. для всех $k = 1, 2, \ldots, r$
$$\max_{j=\overline{1,k}} \left\|\mu_N^{(j)}\right\| < \varepsilon \|x_\varepsilon^{(k)}\| \left(\sum_{i=1}^{k} C_k^i \left\|x_\varepsilon^{(k-i)}\right\|\right)^{-1},$$
если N достаточно велико.

Ниже считаем, что N выбрано настолько большим, что свойство 3 выполнено. Положим
$$x_N(t) := x_\varepsilon(t) \cdot \mu_N(t),$$
и
$$\Delta_N(t) := \Psi(t) - x_N(t).$$
Тогда:
$$x_N(t) = x_\varepsilon(t), \text{ если } \ t \in [\tau_1, \tau_2],$$
$$\Delta_N(t) = \Psi(t), \text{если } \ |t - \tau_1| \geq N \cdot \frac{\lambda}{2} \tag{3.7}$$
и
$$\|x_N\| \leq \|x_\varepsilon\| = (1-\varepsilon)\|x\| \leq (1-\varepsilon)\|\Psi\|.$$
Кроме того для $k = 1, \ldots, r$
$$\left|x_N^{(k)}(t)\right| = \left|[x_\varepsilon(t)\mu_N(t)]^{(k)}\right| = \left|\sum_{i=0}^{k} C_k^i x_\varepsilon^{(k-i)}(t)\mu_N^{(i)}(t)\right| \leq$$
$$\leq \left\|x_\varepsilon^{(k)}\right\| + \sum_{i=1}^{k} C_k^i \left\|x_\varepsilon^{(k-i)}\right\| \left\|\mu_N^{(i)}\right\|.$$
Отсюда, с учетом свойства 3 функции μ_N и выбора числа N, получаем
$$\left\|x_N^{(k)}\right\| < \left\|x_\varepsilon^{(k)}\right\| + \varepsilon \left\|x_\varepsilon^{(k)}\right\| = (1-\varepsilon)\left\|x^{(k)}\right\| + \varepsilon\left\|x^{(k)}\right\| = \left\|x^{(k)}\right\|.$$
Для $t \in [\tau_1, \tau_2]$ имеем $\Delta_N = \Psi(t) - x_\varepsilon(t)$, а значит функция $\Delta_N(t)$ имеет не менее трех перемен знака на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$. На каждом из остальных промежутков монотонности функции Ψ функция Δ_N имеет не менее одной перемены знака. Таким образом, на промежутке $\left[\tau_1 - N \cdot \frac{\lambda}{2}, \tau_1 + N \cdot \frac{\lambda}{2}\right]$ функция $\Delta_N(t)$ имеет не менее $2N + 2$ перемен знака. Кроме того, в силу (3),(2) и (3.7) для всех $i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{r-1}{2}\right]$ справедливы равенства
$$\Delta_N^{(2i-1)}\left(\tau_1 - N \cdot \frac{\lambda}{2}\right) = \Delta_N^{(2i-1)}\left(\tau_1 + N \cdot \frac{\lambda}{2}\right) = 0. \tag{3.8}$$

Все проведённые выше рассуждения справедливы при выполнении любого из условий $a) - c)$. Пусть теперь выполняется условие $a)$ теоремы.

Применяя теорему Ролля и учитывая (3.8) получаем, что функция $\Delta_N^{(r-1)}(t)$ имеет не менее $2N+2$ нуля на промежутке

$$\left[\tau_1 - N\cdot\frac{\lambda}{2}, \tau_1 + N\cdot\frac{\lambda}{2}\right].$$

Отсюда следует, что на некотором промежутке монотонности

$$[\alpha, \alpha+\frac{\lambda}{2}] \subset \left[\tau_1 - N\cdot\frac{\lambda}{2}, \tau_1 + N\cdot\frac{\lambda}{2}\right]$$

функции $\Psi^{(r-1)}(t) = \Psi^{(r-1)}_{0,a_2,b,\lambda}(t)$ функция $\Delta_N^{(r-1)}(t)$ меняет знак не менее трёх раз. Но тогда и разность

$$\Psi^{(r-1)}_{0,0,b,\lambda}(t) - x_N^{(r-1)}(t)$$

на некотором промежутке монотонности функции $\Psi^{(r-1)}_{0,0,b,\lambda}(t)$ меняет знак не менее трех раз. Однако это противоречит теореме сравнения Колмогорова (см., теорему A и, например, [5, Предложение 5.5.3]) так как эйлеров сплайн $\Psi^{(r-1)}_{0,0,b,\lambda}(t)$ является функцией сравнения для функции $x_N^{(r-1)}(t)$.

Если выполняется условие $b)$ теоремы, то применяя аналогичные рассуждения придём к противоречию с теоремой сравнения Колмогорова.

Если же выполняется условие $c)$ теоремы, то применяя аналогичные рассуждения придём к противоречию с уже доказанным случаем $a)$. Теорема доказана.

4. Некоторые приложения

Из теоремы 2 сразу получаем, что справедлива

Лемма 1. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ и выполняется одно из условий $a) - c)$ теоремы 2. Тогда на каждом промежутке монотонности функции $\Psi_{a_1,a_2,b,\lambda}(t)$ разность $\Psi_{a_1,a_2,b,\lambda}(t) - x(t)$ имеет не более одной перемены знака.*

Для 1-периодической неотрицательной суммируемой на периоде функции $x(\cdot)$ через $r(x,\cdot)$ будем обозначать убывающую перестановку функции x (см., например [4, гл. 6]).

Как следствие из теоремы 2 и результатов главы 3 монографии [5] получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть заданы $r \in \mathbb{N}$ и 1–периодическая функция $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$. Пусть выполнено одно из условий $a) - c)$ теоремы 2. Тогда для всех $t > 0$*

$$\int\limits_0^t r(|x'|, u)du \le \lambda^{r-1}\int\limits_0^t r(|\Psi'_{a_1,a_2,b,1}|, u)du.$$

Для $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $p \in (0, \infty)$ и непрерывной функции $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ положим $\|x\|_{L_{p(a,b)}} := \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$.

Из теоремы 3 и общих теорем о сравнении перестановок (см., например, [6, предложение 1.3.10]) получаем следующий аналог неравенства Лигуна [9] (см. также [8, гл. 6]).

Теорема 4. *Пусть заданы $r \in \mathbb{N}$ и 1–периодическая функция $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$. Пусть выполнено одно из условий a)$-$c) теоремы 2. Тогда для любого $1 \le p < \infty$ и натурального $k < r - 2$ (а если выполняется условие a), то для любого натурального $k < r - 1$)*

$$\|x^{(k)}\|_{L_{p(0,1)}} \le \lambda^{r-k}\|\Psi^{(k)}_{a_1,a_2,b,1}\|_{L_{p(0,1)}}.$$

Следующая лемма является аналогом неравенства Бора-Фавара, (см., напр., [10, гл. 6])

Лемма 2. *Пусть заданы $r \in \mathbb{N}$ и 1–периодическая функция $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$. Пусть для $\lambda = 1$ выполняется одно из следующих условий:*

a) *Числа $a_1 = 0$, $a_2 \ge 0$ и $b \ne 0$ таковы, что*

$$\left\|x^{(k)}\right\| \le \left\|\Psi^{(k)}_{a_1,a_2,b,\lambda}\right\|,\ k \in \{r-1, r\}.$$

b) *Числа $a_1 \ge 0$, $a_2 = 0$ и $b \ne 0$ таковы, что*

$$\left\|x^{(k)}\right\| \le \left\|\Psi^{(k)}_{a_1,a_2,b,\lambda}\right\|,\ k \in \{r-2, r\}.$$

c) *Числа $a_1 \ge 0$, $a_2 \ge 0$ и $b \ne 0$ таковы, что*

$$\left\|x^{(k)}\right\| \le \left\|\Psi^{(k)}_{a_1,a_2,b,\lambda}\right\|,\ k \in \{r-1, r-2, r\}.$$

Тогда

$$E_0(x) := \inf_{c\in\mathbb{R}} \|x - c\| \le \|\Psi_{a_1,a_2,b,1}\|.$$

Доказательство проведем индукцией по r. Базис индукции проверяется непосредственно. Остановимся на индуктивном шаге. Предположим противное, пусть $E_0(x) > \|\Psi_{a_1,a_2,b,1}\|$. Пусть c — константа наилучшего равномерного приближения функции x. Можем считать, что $\max\limits_{t\in[0,1]}[x(t) - c]$ достигается в точке $t = 0$, $\min\limits_{t\in[0,1]}[x(t) - c]$ — в точке m и при этом

$$m < \frac{1}{2}. \tag{4.1}$$

Это значит, что $x'(0) = x'(m) = 0$. Кроме того

$$-\int_0^m x'(t)dt = x(0) - x(m) = 2E_0(x) > 2\left\|\Psi_{a_1,a_2,b,1}\right\| = -\int_0^m \Psi'_{a_1,a_2,b,1}(t)dt.$$

Однако последнее неравенство вместе с индуктивным предположением и (4.1) противоречит лемме 1.

Используя теорему 2, лемму 2 и идеи из [11] (см. также [8, §6.4]) получаем следующий аналог неравенства Бабенко, Кофанова и Пичугова.

Теорема 5. *Пусть заданы $r \in \mathbb{N}$ и 1–периодическая функция $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$. Пусть для некоторого $\lambda > 0$ выполняется одно из условий a) – c) леммы 2 и $E_0(x) = \left\|\Psi_{a_1,a_2,b,\lambda}\right\|$. Тогда*

$$\|x\|_{L_{p(0,1)}} \geq \|\Psi_{a_1,a_2,b,\lambda}\|_{L_{p(0,\lambda)}}.$$

Для функции $x \in L_\infty(\mathbb{R})$ через $c(x)$ обозначим константу наилучшего приближения функции x в $L_\infty(\mathbb{R})$.

Из теоремы 5, теоремы 2 и идей из [12] (см. также [8, §6.7]) получаем следующий аналог неравенства типа Надя [13], полученного Бабенко, Кофановым и Пичуговым.

Теорема 6. *Пусть заданы $r \in \mathbb{N}$, 1–периодическая функция $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$, и числа $p, q \in (0,\infty)$, $q > p$. Пусть для некоторого $\lambda > 0$ выполняется одно из условий a) – c) леммы 2 и $\left\|\Psi_{a_1,a_2,b,\lambda}\right\|_{L_{p(0,\lambda)}} = \|x - c(x)\|_{L_{p(0,1)}}$. Тогда*

$$\left\|\Psi_{a_1,a_2,b,\lambda}\right\|_{L_{q(0,\lambda)}} \geq \|x - c(x)\|_{L_{q(0,1)}}.$$

Библиографические ссылки

1. *Kolmogorov A. N.* Une generalization de l'inegalite de M. J. Hadamard entre les bornes superieures des derivees successives d'une function. // C. r. Acad. sci. Paris. — 1938. — **207**. P. 764 – 765.
2. *Колмогоров А.Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале. /А.Н. Колмогоров // Ученые записки МГУ. — 1939. — **30**. — С. 3–16.
3. *Колмогоров А.Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале. /А.Н. Колмогоров // А.Н. Колмогоров, Избранные труды, Математика и механика. — М., 1985, — С. 252 – 263.
4. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения /Н.П. Корнейчук — М., 1976, — 320 с.
5. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения /Н.П. Корнейчук — М., 1987, — 423 с.

6. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов /Н.П. Корнейчук, В.Ф. Бабенко, А.А. Лигун — Киев, 1992, — 304 с.
7. *Бабенко В.Ф.* Неравенства для производных и их приложения / В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов, С.А Пичугов — Киев, 2003, — 590 с.
8. *Родов, А.М.* Зависимость между верхними гранями производных функций действительного переменного /А.М. Родов // Изв. АН СССР. Сер. Мат.— 1946. **10**. С. 257—270.
9. *Ligun A.A.* Inequalities for upper bounds of functionals // Analysis Math. — 1976. — **2**, N 1. — P. 11–40.
10. *Корнейчук Н.П.* Аппроксимация с ограничениями / Н.П. Корнейчук, А.А Лигун, В.Г. Доронин — Киев, 1982, — 250 с.
11. *Babenko V.F., Kofanov V.A., Pichugov S.A.* Inequalities for norms of intermediate derivatives of periodic functions and their applications // Ibid. — N 3. — P.251–376.
12. *Babenko V.F., Kofanov V.A., Pichugov S.A.* Comparison of rearrangement and Kolmogorov-Nagy type inequalities for periodic functions // Approximation theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov (B. Bojanov, Ed.). — Darba, Sofia, 2002. — P. 24–53.
13. *Sz.-Nagy B.* Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung // Acta. Sci. Math. — 1941. — **10**, — C. 64–74.

Надійшло до редколегії 05.05.2012