ISSN 9125 0912. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2012, вип. **17**

УДК 510.22

Нечіткі множини і статистичні критерії

С. Є. Бєльков*, **В. І. Рубан****

* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: sb43s@rambler.ru*
** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: v_ruban@ukr.net*

Статистичні критерії для перевірки гіпотез відносно параметрів нормального розподілу дають множину значень параметрів, для яких гіпотеза не відхиляється. Для вибору значень, найбільш відповідних вибірці, застосована теорія нечітких множин.

Ключові слова: перевірка гіпотез, нечіткі множини.

Статистические критерии для проверки гипотез относительно параметров нормального распределения дают множество значений параметров, для которых гипотеза не отклоняется.Для выбора значений, наиболее соответствующих выборке, использована теория нечетких множеств.

Ключевые слова: проверка гипотез, нечеткие множества.

Statistical criteria to test hypotheses concerning the parameters of the normal distribution give set of parameter values for which the hypothesis is not rejected. In this article to select values that are more consistent with the sample, using the theory of fuzzy sets.

Key words: Hypotheses verification, fuzzy sets.

1. Уточнення середнього нормального розподілу

Нехай $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ..., \xi_n(\omega))$ — реалізація вибірки із нормального розподілу з параметрами (a, σ^2), значення дисперсії σ^2 вважається відомим, значення параметра a невідоме. Гіпотеза $H_0 : a = a_0$ перевіряється за допомогою критерію Стьюдента [2]. Для уточнення значення параметра a розподілу, з якого отримана вибірка, використаємо теорію нечітких множин[1].

Нехай $A_0 = \{a_0 \in R | \phi_{a_0} < n_{\alpha,0,1}\}$ — множина значень тих параметрів, для яких критерій не відхилив гіпотезу, де $n_{\alpha,0,1}$ — верхня α-межа $N_{0,1}$-розподілу,

$$\phi_{a_0} = \frac{\left|\bar{\xi}(\omega) - \alpha_0\right|}{\sigma/\sqrt{n}},\ \bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega).$$

Будемо розглядати A_0 як носій нечіткої множини значень параметра a_0 для розподілу, з якого отримана вибірка.

Визначимо значення функції приналежності нечіткій множині з носієм A_0 для кожного елементу із A_0. При цьому врахуємо такі факти: внаслідок похибок при вимірюваннях та обчислюваннях одержані значення ϕ_{a_0} відрізняються від справжніх і ті значення, які потрапили близько до α-меж насправді можуть бути поза ними; імовірність того, що $N_{0,1}$-розподілена випадкова величина набуде значень з околу 0 більша, ніж імовірність, що ця величина набуде значень з околу іншої точки.

Для двосторонньої альтернативи $a \neq a_0$ визначимо значення функції приналежності для $a \in A_0$ наступним чином:

$$\mu(a_0) = 1 - \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\phi_{a_0}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{2} \right|. \tag{1}$$

Якщо $a > a_0$:

$$\mu(a_0) = \frac{3}{2} - \int_{-\infty}^{\phi_{a_0}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{2}$$

Якщо $a < a_0$:

$$\mu(a_0) = \frac{1}{2} + \int_{-\infty}^{\phi_{a_0}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{3}$$

Тепер будемо вважати обидва параметри a та σ невідомими.

Нехай множина A_1 утворюється аналогічно множині A_0, за виключенням того, що використовується статистика

$$t_{a_0} = \frac{|\bar{\xi} - a_0|}{s/\sqrt{n}}.$$

При двобічній альтернативі визначимо значення функції приналежності для кожного $a_0 \in A_1$ за формулою

$$\mu(a_0) = 1 - \left| \int_{-\infty}^{t_{a_0}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{2} \right|. \tag{4}$$

Якщо альтернатива однобічна, $a > a_0$, то

$$\mu(a_0) = \frac{3}{2} - \int_{-\infty}^{t_{a_0}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{5}$$

Нарешті, при альтернативі $a < a_0$

$$\mu(a_0) = \frac{1}{2} + \int_{-\infty}^{t_{a_0}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{6}$$

2. Уточнення дисперсії нормального розподілу

Нехай $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ..., \xi_n(\omega))$ — реалізація вибірки із нормального розподілу з параметрами (a, σ^2). Значення параметрів a, σ^2 невідомі. Гіпотеза $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ перевіряється за допомогою критерію Стьюдента [2]. Для уточнення значення параметра σ^2 використаємо теорію нечітких множин[1].

Нехай $A_2 = \left\{\sigma_0^2 | \frac{s^2}{\sigma_0^2} \in \left(\frac{1}{n-1}\chi^2_{(1-\alpha);(n-1)}; \frac{1}{n-1}\chi^2_{\alpha;(n-1)}\right)\right\}$ — множина значень тих параметрів σ_0^2, для яких критерій не відхилив гіпотезу. Аналогічно попередньому пункту будемо розглядати A_2 як носій нечіткої множини. Визначимо функцію приналежності для кожного значення параметра з A_2 за таким законом:

якщо альтернатива двобічна:

$$\mu(\sigma_0^2) = 1 - \left| \int_{-\infty}^{k} p(x)dx - \int_{-\infty}^{x_0} p(x)dx \right|; \tag{7}$$

якщо альтернатива однобічна $\sigma^2/\sigma_0^2 > 1$:

$$\mu(\sigma_0^2) = 1 - \int_{x_0}^{k} p(x)dx. \tag{8}$$

Нарешті, при альтернативі $\sigma^2/\sigma_0^2 < 1$:

$$\mu(\sigma_0^2) = 1 - \int_{k}^{x_0} p(x)dx. \tag{9}$$

Тут $p(x)$ — щільність $\frac{1}{n-1}\chi^2_{(n-1)}$-розподілу, $k = s^2/\sigma_0^2$, x_0 — точка максимуму $p(x)$, $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2$.

Бібліографічні посилання

1. *Орлов А.И.* Нечисловые статистики/А.И. Орлов — М., 2004, — 513 с.
2. *Турчин В.Н.* Теория вероятностей и математическая статистика/ В.Н. Турчин — Д., 2008, — 656 с.

Надійшло до редколегії 10.06.2012