ISSN 9125 0912. *Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2012, вип.* **17**

УДК 517.5

Абсолютная суммируемость методом Вороного интегралов с множителями

Л. Г. Бойцун*, Т. И. Рыбникова**

* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050.

** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. *E-mail: t.rybnikova@gmail.com*

Подано доведення теореми про абсолютну пiдсумовуванiсть методом Вороного iнтегралiв з множником.

Ключовi слова: пiдсумовування методом Вороного, середнi Вороного, метод Чезаро.

Доказана теорема об абсолютной суммируемости методом Вороного интегралов с множителем.

Ключевые слова: суммирование методом Вороного, средние Вороного, метод Чезаро.

In this paper authors prove a theorem on the absolute Voronoi summability of the factored integrals.

Key words: Voronoi summability, the Voronoi means, Chesaro's method.

1. Пусть функция $f(u)$ интегрируема на каждом конечном промежутке $[0, A]$, $A > 0$, и $S(t) = \int\limits_0^t f(u)du$.

Пусть функция $p(t)$ интегрируема на $[0, y]$, $y > 0$, и $P(y) = \int\limits_0^y p(t)dt$.

Говорят, что интеграл $\int\limits_0^\infty f(u)du$ суммируется методом Вороного к I [1], $(W(p(y)) --$ суммируем к I, если

$$\lim_{y\to\infty} \tau(y) = I,$$

где

$$\tau(y) = \frac{1}{P(y)} \int\limits_0^y p(y-u) \cdot s(u)du = \frac{1}{P(y)} \int\limits_0^y P(y-u) \cdot f(u)du,$$

и абсолютно суммируется, $|W, p(y)|$ – суммируем, если $\int\limits_0^\infty |\tau'(y)|dy < \infty$.

Отметим, что в иностранной математической литературе этот метод называют методом Нермунда, хотя Нермунд рассмотрел его 18 лет спустя после введения этого метода Г.Ф. Вороным [2].

2. В настоящей статье доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\lambda(y)$ такая, что $\lambda''(y) \geq 0$,*

$$\int\limits_0^\infty \frac{\lambda(y)}{y+1} \left(\ln(y+1)\right)^{\frac{1}{2}} dy < \infty$$

и

$$\int\limits_0^y \frac{|S(u)|}{u+1} du = O\left(\ln(y+1)\right)^{k+1}, \qquad k \geq 0,$$

тогда интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{P(y) \cdot \lambda(y) \cdot f(y) dy}{(y+1)\left(\ln(y+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}$$

$|W, p(y)|$ *– суммируем, где $p(y)$ и $-p'(y)$ – обе неотрицательные и невозрастающие функции.*

Если $p(t) = t^{\alpha-1}$, $\alpha > 0$, метод Вороного превращается в известный метод Чезаро, (C, α) – метод, $\alpha > 0$ [3]. При $0 < \alpha < 1$ $p'(t) = (\alpha - 1)t^{\alpha-2} < 0$, и как частный случай из теоремы 1 мы получаем теорему об абсолютной суммируемости факторизованных интегралов методом Чезаро.

Теорема 2. *Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\lambda(y)$ такая, что $\lambda''(y) \geq 0$,*

$$\int\limits_0^\infty \frac{\lambda(y)}{y+1} \left(\ln(y+1)\right)^{\frac{1}{2}} dy < \infty$$

и

$$\int\limits_0^y \frac{|S(u)|}{u+1} du = O\left(\ln(y+1)\right)^{k+1}, \qquad k \geq 0,$$

тогда интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{y^\alpha \cdot \lambda(y) \cdot f(y) dy}{(y+1)\left(\ln(y+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}$$

$|C, \alpha|$ *– суммируем, $0 \leq \alpha < 1$.*

3. Для доказательства нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\lambda(u)$ такая, что $\lambda''(u) \geq 0$, $\int\limits_0^\infty \frac{\lambda(u)}{u+1} dy$ сходится, тогда $\lambda(u)$ – неотрицательная, невозрастающая функция такая, что*

$$y \cdot \lambda'(y) = O(1) \qquad \text{и} \qquad \lambda(y) \ln(y+1) = O(1),$$

когда $y \to \infty$.

Доказательство. Из условия леммы следует, что $\lambda(u)$ ограниченная функция. Из $\lambda''(u) \geq 0$ следует, что $\lambda'(u)$ не убывает. Она не может быть положительной для некоторого значения $u_0 \geq 0$, так как из этого следовало бы, что она больше некоторой положительной константы для всех $u > u_0$, откуда бы вытекало, что $\lambda(y) \to +\infty$, когда $y \to \infty$, а это противоречит предположению.

Таким образом $\lambda''(u) \leq 0$ для $u \geq 0$, значит $\lambda(u)$ – невозрастающая функция и $\lim\limits_{y\to\infty} \lambda(y) = 0$. Следовательно, $\lambda(u) \geq 0$.

Далее, интегрируя по частям, получаем

$$\lambda(y) - \lambda(0) = \int\limits_0^y \lambda'(u)du = y \cdot \lambda'(y) - \int\limits_0^y u \cdot \lambda''(u)du,$$

откуда $y \cdot \lambda'(y) = O(1)$ и $\int\limits_0^y u \cdot \lambda''(u)du = O(1)$, когда $y \to \infty$.

Аналогично

$$\int\limits_0^y \frac{\lambda(u)}{u+1}du = \lambda(y) \cdot \ln(y+1) - \int\limits_0^y \lambda'(u) \ln(u+1)du,$$

откуда $\lambda(y) \cdot \ln(y+1) = O(1)$ и $\int\limits_0^y \lambda'(u) \ln(u+1)du = O(1)$, когда $y \to \infty$.

Лемма 2. *Если* $\left(\lambda(y)(\ln(y+1))^{\frac{1}{2}}\right)'' \geq 0$ *и* $\int\limits_0^\infty \frac{\lambda(y)\cdot(\ln(y+1))^{\frac{1}{2}}}{y+1}dy$ *сходится, тогда дважды непрерывно дифференцируемая функция* $\lambda(y) \cdot (\ln(y+1))^{\frac{1}{2}}$ *удовлетворяет тем же условиям, как и* $\lambda(y)$ *в лемме 1 и*

$$\int\limits_0^y \lambda'(u) \left(\ln(u+1)\right)^{\frac{3}{2}} du = O(1), \qquad \text{когда } y \to \infty.$$

Доказательство. Из условия леммы следует, что $\lambda(y)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция такая, что $\lambda''(y) \geq 0$ и $\int\limits_0^\infty \frac{\lambda(u)}{u+1}du$ сходится.

Интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_0^y \lambda'(u) \left(\ln(u+1)\right)^{\frac{3}{2}} du = \lambda(y) \cdot (\ln(u+1))^{\frac{3}{2}} - \lambda(0)(\ln 2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \int\limits_0^y \frac{\lambda(u)\left(\ln(u+1)\right)^{\frac{1}{2}}}{u+1}du = O(1)$$

в силу леммы 1.

Лемма 3. *Если* $\left(\lambda(y)(\ln(y+1))^{\frac{1}{2}}\right)$ *удовлетворяет тем же условиям, что и в лемме 2, тогда*

$$\int\limits_0^y u\,(\ln(u+2))^{3/2}\cdot\lambda''(u)du = O(1) \qquad \text{и} \qquad (\ln(y+1))^{3/2}\cdot\lambda'(y) = O(1), \ \ \text{когда } y\to\infty.$$

Доказательство. Мы имеем

$$F = \int\limits_0^y \lambda'(u)\,(\ln(u+1))^{3/2}\,du = \lambda'(y)\cdot y\cdot(\ln(y+1))^{3/2} -$$

$$-\frac{3}{2}\int\limits_0^y \frac{u\,(\ln(u+1))^{\frac{1}{2}}}{u+1}\lambda'(u)\,du - \int\limits_0^y u\cdot(\ln(u+1))^{3/2}\,\lambda''(u)du = F_1+F_2+F_3. \quad (1)$$

По лемме 2 $F = O(1)$ и $F_2 = O\left(\int\limits_0^y (\ln(u+1))^{1/2}\,\lambda'(u)du\right) = O(1)$, когда $y\to\infty$. Следовательно, $F_1+F_3 = O(1)$. Так как F_1 и F_2 оба отрицательны, то отсюда заключаем, что $F_1 = O(1)$ и $F_2 = O(1)$, что завершает доказательство леммы 3.

Лемма 4. *Если* $\left(\lambda(y)(\ln(y+1))^{\frac{1}{2}}\right)'' \geq 0$ *и* $\int\limits_0^\infty \frac{\lambda(y)\cdot(\ln(y+1))^{\frac{1}{2}}}{y+1}dy$ *сходится, тогда* $\mu(y) = \dfrac{\lambda(y)}{(\ln(y+2))^{k-\frac{1}{2}}}$, $k\geq 0$, *такая, что* $\mu''\geq 0$ *и* $\int\limits_0^\infty \frac{\mu(y)}{y+1}dy$ *сходится. Если далее*

$$\int\limits_0^y \frac{|S(u)|}{u+1}\,du = O\left((\ln(y+2))^{k+1}\right),\ \ k\geq 0,$$

тогда

$$\int\limits_0^y \frac{|S(u)|}{u+1}\,\mu(u)du = O(1), \qquad \text{когда } \ y\to\infty.$$

Доказательство. Используя формулу $(u\cdot v)'' = u''v+2u'v'+uv''$, получаем

$$\mu''(y) = \left(\lambda(y)(\ln(y+2))^{\frac{1}{2}}\right)''(\ln(y+2))^{-k} + 2\left(\lambda(y)(\ln(y+2))^{\frac{1}{2}}\right)'\cdot\left((\ln(y+2))^{-k}\right)' +$$

$$+\,\lambda(y)(\ln(y+2))^{\frac{1}{2}}\left((\ln(y+2))^{-k}\right)'' = i_1+i_2+i_3.$$

Имеем: $i_1\geq 0$ по условию леммы; в i_2 $\left(\lambda(y)(\ln(y+2))^{\frac{1}{2}}\right)''\leq 0$ в силу леммы 1, $\left((\ln(y+2))^{-k}\right)' = -k\,(\ln(y+2))^{-k-1}\,\dfrac{1}{y+2} < 0$, так что $i_2>0$; $\left((\ln(y+2))^{-k}\right)''>0$, $\lambda(y)\geq 0$ в силу леммы 1, так что $i_3>0$. Мы имеем, что $\mu''(y)\geq 0$.

Из сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty \frac{\lambda(y)\cdot(\ln(y+1))^{\frac{1}{2}}}{y+1}dy$ следует сходимость интеграла $\int\limits_0^\infty \frac{\mu(y)}{y+1}dy = \int\limits_0^\infty \frac{\lambda(y)dy}{(y+1)\left(\ln(y+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}$, $k\geq 0$, что следует из второй теоремы сравнения для несобственных интегралов.

Интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_0^y \frac{|S(u)|}{u+1}\,\mu(u)du = \int\limits_0^y \frac{|S(u)|\lambda(u)du}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}} = \frac{\lambda(y)dy}{(y+1)\left(\ln(y+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\int\limits_0^y \frac{|S(t)|}{t+1}\,dt -$$

$$-\int\limits_0^\infty \frac{\lambda'(u)du}{\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\int\limits_0^u \frac{|S(t)|}{t+1}\,dt + \left(k-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^y \frac{\lambda(u)du}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k+\frac{1}{2}}}\int\limits_0^u \frac{|S(t)|}{t+1}\,dt =$$

$$= O\left(\frac{\lambda(y)\left(\ln(y+2)\right)^{k+1}}{\left(\ln(y+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\right) + O\left(\int\limits_0^y \lambda'(u)\left(\ln(u+2)\right)^{\frac{3}{2}}du\right) +$$

$$+ O\left(\int\limits_0^y \frac{\lambda(u)\left(\ln(u+2)\right)^{\frac{1}{2}}}{u+2}\,du\right) = O(1)$$

в силу леммы 2 и условия леммы 4.

Лемма 5. *При условии теоремы*

$$Z = \int\limits_0^A \frac{dy}{P(y)}\int\limits_0^y \frac{[p(y-u)-p(y)]}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\,\lambda'(u)|S(u)|\,du = O(1).$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_0^y \frac{(p(y-u)-p(y))P(u)}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\,\lambda'(u)|S(u)|\,du = \frac{(p(0)-p(y))P(y)\lambda'(y)}{\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\int\limits_0^y \frac{|S(z)|}{z+1}\,dz -$$

$$-\int\limits_0^y \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{(p(t-u)-p(y))P(u)\cdot\lambda'(u)}{\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\right\}du\int\limits_0^u \frac{|S(z)|}{z+1}\,dz,$$

так что

$$Z=\int\limits_0^A \frac{p(0)-p(y)}{(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\lambda'(y)dy\int\limits_0^y \frac{|S(z)|}{z+1}\,dz-$$

$$-\int\limits_0^A \frac{dy}{P(y)}\int\limits_0^y \frac{p'(y-u)\cdot P(u)\cdot\lambda'(u)}{(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\,du\int\limits_0^u \frac{|S(z)|}{z+1}\,dz-$$

$$-\int\limits_0^A \frac{dy}{P(y)}\int\limits_0^y \frac{(p(y-u)-p(y))p(u)\cdot\lambda'(u)}{(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\,du\int\limits_0^u \frac{|S(z)|}{z+1}\,dz-$$

$$-\int\limits_0^A \frac{dy}{P(y)}\int\limits_0^y \frac{(p(y-u)-p(y))P(u)\cdot\lambda''(u)}{(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\,du\int\limits_0^u \frac{|S(z)|}{z+1}\,dz+$$

$$+\left(k-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^A \frac{dy}{P(y)}\int\limits_0^y \frac{(p(y-u)-p(y))P(u)\cdot\lambda'(u)}{(u+2)\,(\ln(u+2))^{k+\frac{1}{2}}}\,du\int\limits_0^u \frac{|S(z)|}{z+1}\,dz=$$

$$=O\left(\int\limits_0^A (p(0)-p(y))\cdot\lambda'(y)\cdot(\ln(y+2))^{\frac{3}{2}}\,dy\right)+$$

$$+O\left(\int\limits_0^A \frac{dy}{P(y)}\int\limits_0^y (-p'(y-u))\cdot P(u)\cdot\lambda'(u)\,(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}\,du\right)+$$

$$+O\left(\int\limits_0^A \frac{dy}{P(y)}\int\limits_0^y (p(y-u)-p(y))\cdot p(u)\cdot\lambda'(u)\,(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}\,du\right)+$$

$$+O\left(\frac{dy}{P(y)}\int\limits_0^y (p(y-u)-p(y))\cdot P(u)\cdot\lambda''(u)\,(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}\,du\right)+$$

$$+O\left(\frac{dy}{P(y)}\int\limits_0^y \frac{(p(y-u)-p(y))\cdot P(u)\cdot\lambda'(u)\,(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}}{u+2}du\right)=$$

$$=O\left(\int\limits_0^A \lambda'(y)\,(\ln(y+2))^{\frac{3}{2}}\,dy\right)+O\left(\int\limits_0^A P(u)\lambda'(u)(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}du\int\limits_0^A \frac{-p'(y-u)}{P(y)}\,dy\right)+$$

$$+O\left(\int\limits_0^A p(u)\lambda'(u)(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}du\int\limits_u^A \frac{p(y-u)-p(y)}{P(y)}\,dy\right)+$$

$$+O\left(\int\limits_0^A P(u)\lambda''(u)(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}du\int\limits_u^A \frac{p(y-u)-p(y)}{P(y)}\,dy\right)+$$

$$+O\left(\int_0^A \frac{P(u)\lambda'(u)(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}}{u+2}\,du\int_u^A \frac{p(y-u)-p(y)}{P(y)}\,dy\right)=$$

$$=O(1)+O\left(\int_0^A \lambda'(u)(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}du\right)+O\left(\int_0^A u\cdot\lambda''(u)(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}du\right)+$$

$$+O\left(\int_0^A \frac{u\lambda'(u)(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}}{u+2}\,du\right)=O(1)$$

по леммам 2 и 3.

Лемма 6. *При условии леммы 5 имеет место*

$$Y=\int_0^A\left|\frac{p(y)}{P^2(y)}\,du\int_0^y\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{(P(y)-P(y-u))\cdot P(u)}{(u+1)\,(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\right\}\cdot\lambda(u)\cdot S(u)\right|du=O(1).$$

Доказательство. Так как

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{(P(y)-P(y-u))P(u)}{(u+1)\,(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\right\}=\frac{p(y-u)P(u)}{(u+1)\,(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}+\frac{(P(y)-P(y-u))p(u)}{(u+1)\,(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}-$$

$$-\frac{(P(y)-P(y-u))P(u)}{(u+1)^2\,(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}-\frac{(P(y)-P(y-u))P(u)\left(k-\frac{1}{2}\right)}{(u+1)(u+2)\,(\ln(u+2))^{k+\frac{1}{2}}},$$

то

$$Y=O\left(\int_0^A\frac{p(y)}{P^2(y)}\,du\int_0^y\frac{p(y-u)P(u)\cdot\lambda(u)\cdot|S(u)|}{(u+1)\,(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\,du\right)+$$

$$+O\left(\int_0^A\frac{p(y)}{P^2(y)}\,du\int_0^y\frac{(P(y)-P(y-u))p(u)\cdot\lambda(u)\cdot|S(u)|}{(u+1)\,(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\,du\right)+$$

$$+O\left(\int_0^A\frac{p(y)}{P^2(y)}\,du\int_0^y\frac{(P(y)-P(y-u))P(u)\cdot\lambda(u)\cdot|S(u)|}{(u+1)^2\,(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\,du\right)=$$

$$=O\left(\int_0^A\frac{P(u)\cdot\lambda(u)\cdot|S(u)|}{(u+1)\,(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\,du\int_u^A\frac{p(y)\cdot p(y-u)}{P^2(y)}\,dy\right)+$$

$$+O\left(\int_0^A\frac{p(u)\cdot\lambda(u)\cdot|S(u)|}{(u+1)\,(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\,du\int_u^A\frac{p(y)(P(y)-P(y-u))}{P^2(y)}\,dy\right)+$$

$$+O\left(\int\limits_0^A \frac{P(u)\cdot\lambda(u)\cdot|S(u)|}{(u+1)^2\,(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\,du\int\limits_u^A \frac{p(y)(P(y)-P(y-u))}{P^2(y)}\,dy\right)=$$

$$=O\left(\int\limits_0^A \frac{P(u)\cdot\lambda(u)\cdot|S(u)|}{(u+1)\,(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\,du\int\limits_u^A \frac{p(y)\cdot p(y-u)}{P^2(y)}\,dy\right)+$$

$$+O\left(\int\limits_0^A \frac{p(u)\cdot\lambda(u)\cdot|S(u)|}{(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\,du\int\limits_u^A \frac{p(y)\cdot p(y-u)}{P^2(y)}\,dy\right)=$$

$$=O\left(\int\limits_0^A \frac{\lambda(u)\cdot|S(u)|}{(u+1)\,(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\,du\right)=O(1),$$

так как $P(y)-P(y-u)=\int\limits_{y-u}^{y} p(t)dt\le p(y-u)\cdot u$, $\int\limits_u^A \frac{p(y)\cdot p(y-u)}{P^2(y)}dy=O\left(\frac{1}{P(u)}\right)$, и в силу леммы 4.

Лемма 7. *При условии леммы 5*

$$X=\int\limits_0^A \frac{p(y)}{P^2(y)}\,du\int\limits_0^y \frac{(P(y)-P(y-u))P(u)}{(u+1)\,(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\cdot\lambda'(u)|S(u)|\,du=O(1).$$

Доказательство. Интегрируя по частям, имеем

$$\int\limits_0^y \frac{(P(y)-P(y-u))P(u)}{(u+1)\,(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\cdot\lambda'(u)|S(u)|\,du=\frac{\lambda'(y)P^2(u)}{(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\int\limits_0^y \frac{|S(z)|}{z+1}\,dz-$$

$$-\int\limits_0^y \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{(P(y)-P(y-u))P(u)}{(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\cdot\lambda'(u)\right\}du\int\limits_0^u \frac{|S(z)|}{z+1}\,dz,$$

так что

$$X=\int\limits_0^A \frac{p(y)\cdot\lambda'(y)}{P^2(u)}\,dy\int\limits_0^y \frac{|S(z)|}{z+1}\,dz-$$

$$-\int\limits_0^A \frac{p(y)}{P^2(y)}\,dy\int\limits_0^y \frac{p(y-u)\cdot P(u)\cdot\lambda'(u)}{(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\,du\int\limits_0^u \frac{|S(z)|}{z+1}\,dz+$$

$$+\int\limits_0^A \frac{p(y)}{P^2(y)}\,dy\int\limits_0^y \frac{(P(y)-P(y-u))p(u)\cdot\lambda'(u)}{(\ln(u+2))^{k-\frac{1}{2}}}\,du\int\limits_0^u \frac{|S(z)|}{z+1}\,dz+$$

$$+\left(k-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^A \frac{p(y)}{P^2(y)}\,dy\int\limits_0^y \frac{(P(y)-P(y-u))P(u)\cdot\lambda'(u)}{(u+2)\left(\ln(y+2)\right)^{k+\frac{1}{2}}}\,du\int\limits_0^u \frac{|S(z)|}{z+1}\,dz-$$

$$-\int\limits_0^A \frac{p(y)}{P^2(y)}\,dy\int\limits_0^y \frac{(P(y)-P(y-u))P(u)\cdot\lambda''(y)}{\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\,du\int\limits_0^u \frac{|S(z)|}{z+1}\,dz=$$

$$=O\left(\int\limits_0^A |\lambda'(y)|\cdot p(y)\cdot(\ln(y+2))^{\frac{3}{2}}\,dy\right)+$$

$$+O\left(\int\limits_0^A \frac{p(y)}{P^2(y)}\,dy\int\limits_0^y p(y-u)\cdot P(u)|\lambda'(u)|\,(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}\,du\right)+$$

$$+O\left(\int\limits_0^A \frac{p(y)}{P^2(y)}\,dy\int\limits_0^y (P(y)-P(y-u))\,p(u)\cdot|\lambda'(u)|\,(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}\,du\right)+$$

$$+O\left(\int\limits_0^A \frac{p(y)}{P^2(y)}\,dy\int\limits_0^y \frac{(P(y)-P(y-u))\,P(u)\cdot|\lambda'(u)|\,(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}}{u+2}\,du\right)+$$

$$+O\left(\int\limits_0^A \frac{p(y)}{P^2(y)}\,dy\int\limits_0^y (P(y)-P(y-u))\,P(u)\cdot\lambda''(u)\,(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}\,du\right)=$$

$$=O\left(\int\limits_0^A \lambda'(y)\,(\ln(y+2))^{\frac{3}{2}}\,dy\right)+$$

$$+O\left(\int\limits_0^A P(u)\cdot\lambda'(u)\,(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}\,du\int\limits_u^A \frac{p(y)\cdot p(y-u)}{P^2(y)}\,dy\right)+$$

$$+O\left(\int\limits_0^A p(u)\cdot\lambda'(u)\,(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}\,du\int\limits_u^A \frac{p(y)\,(P(y)-P(y-u))}{P^2(y)}\,dy\right)+$$

$$+O\left(\int\limits_0^A \frac{P(u)\cdot\lambda'(u)\,(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}}{u+2}\,du\int\limits_u^A \frac{p(y)\,(P(y)-P(y-u))}{P^2(y)}\,dy\right)+$$

$$+O\left(\int\limits_0^A P(u)\cdot\lambda''(u)\,(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}\,du\int\limits_u^A \frac{p(y)\,(P(y)-P(y-u))}{P^2(y)}\,dy\right)=$$

$$=O(1)+O\left(\int\limits_0^A \lambda'(u)\,(\ln(u+2))^{\frac{3}{2}}\,du\right)+$$

$$+O\left(\int\limits_0^A \lambda'(u)\left(\ln(u+2)\right)^{\frac{3}{2}}\frac{up(u)}{P(u)}\,du\right)+O\left(\int\limits_0^A u\left(\ln(u+2)\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\lambda''(u)dy\right)=O(1)$$

в силу леммы 2 и леммы 3.

4.

Доказательство теоремы 1. Имеем

$$\tau(y)=\frac{1}{P(y)}\int\limits_0^y P(y-u)\cdot\omega(u)du,$$

где

$$\omega(u)=\frac{P(u)\cdot\lambda(u)\cdot f(u)}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}},$$

откуда

$$\tau'(y)=-\frac{p(y)}{P(y)}\int\limits_0^y P(y-u)\cdot\omega(u)du+\frac{1}{P(y)}\int\limits_0^y P(y-u)\cdot\omega(u)du=$$

$$=\frac{1}{P^2(y)}\int\limits_0^y\left[P(y)p(y-u)-P(y-u)p(y)\right]\omega(u)du=$$

$$=\frac{1}{P^2(y)}\int\limits_0^y\left[p(y-u)-p(y)\right]P(y)\omega(u)du+\frac{1}{P^2(y)}\int\limits_0^y\left[P(y)-P(y-u)\right]p(y)\omega(u)du=$$

$$=I_1+I_2.$$

Для доказательства теоремы нужно показать, что

$$\int\limits_0^\infty|\tau''(y)|dy\le\int\limits_0^\infty|I_1|dy+\int\limits_0^\infty|I_2|dy<\infty.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$I_1=-\frac{1}{P(y)}\int\limits_0^y\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\left(p(y-u)-p(y)\right)P(u)}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\,\lambda(u)\right\}\cdot S(u)du+$$

$$+\frac{\left(p(0)-p(y)\right)\lambda(y)}{(y+1)\left(\ln(y+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\,S(y)=-\frac{1}{P(y)}\int\limits_0^y\frac{\partial}{\partial u}\frac{\left(p(y-u)-p(y)\right)P(u)}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\,\lambda(u)\cdot S(u)du+$$

$$+\frac{1}{P(y)}\int\limits_0^y\frac{\left(p(y-u)-p(y)\right)P(u)}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\,\lambda'(u)du+\frac{\left(p(0)-p(y)\right)\lambda(y)}{(y+1)\left(\ln(y+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\,S(y)=I_{11}+I_{12}+I_{13}.$$

Далее, так как

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\left(p(y-u)-p(y)\right)P(u)}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\right\}=-\frac{p\text{б/}(y-u)P(u)}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}-$$
$$-\frac{\left(p(y-u)-p(y)\right)P(u)}{(u+1)^2\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}+\frac{\left(p(y-u)-p(y)\right)p(u)}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}-$$
$$-\frac{\left(p(y-u)-p(y)\right)P(u)\left(k-\frac{1}{2}\right)}{(u+1)(u+2)\left(\ln(u+2)\right)^{k+\frac{1}{2}}}$$

тогда

$$\int\limits_0^A|I_{11}|dy=O\left(\int\limits_0^A\frac{dy}{P(y)}\int\limits_0^y\frac{|p'(y-u)|\cdot P(u)\cdot\lambda(u)}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}|S(u)|du\right)+$$
$$+O\left(\int\limits_0^A\frac{dy}{P(y)}\int\limits_0^y\frac{\left(p(y-u)-p(y)\right)\cdot P(u)\cdot\lambda(u)}{(u+1)^2\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}|S(u)|du\right)+$$
$$+O\left(\int\limits_0^A\frac{dy}{P(y)}\int\limits_0^y\frac{\left(p(y-u)-p(y)\right)\cdot p(u)\cdot\lambda(u)}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}|S(u)|du\right)=$$
$$=O\left(\int\limits_0^A\frac{P(u)\cdot\lambda(u)\cdot|S(u)|}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}du\int\limits_u^A\frac{-p'(y-u)}{P(y)}\,dy\right)+$$
$$+O\left(\int\limits_0^A\frac{P(u)\cdot\lambda(u)\cdot|S(u)|}{(u+1)^2\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\,du\int\limits_u^A\frac{p(y-u)-p(y)}{P(y)}\,dy\right)+$$
$$+O\left(\int\limits_0^A\frac{p(u)\cdot\lambda(u)\cdot|S(u)|}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}du\int\limits_u^A\frac{\left(p(y-u)-p(y)\right)}{P(y)}\,dy\right)=$$
$$=O\left(\int\limits_0^A\frac{\lambda(u)\cdot|S(u)|}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}du\right)=O(1),$$

когда $A\to\infty$ в силу леммы 4.

Далее по лемме 5

$$\int\limits_0^A|I_{12}|dy=O(1),\qquad \text{когда } A\to\infty.$$

Также в виду леммы 4

$$\int_0^A |I_{13}|dy = \int_0^A \frac{(p(0)-p(y))\lambda(y)}{(y+1)\left(\ln(y+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\,|S(y)|du =$$

$$= O\left(\int_0^A \frac{\lambda(y)\cdot|S(y)|}{(y+1)\left(\ln(y+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\,du\right) = O(1),$$

когда $A \to \infty$.

Опять проинтегрируем по частям I_2, получаем

$$I_2 = \frac{p(y)}{P^2(y)} S(u) \frac{\left(P(y)-P(y-u)\right)P(u)\cdot\lambda(u)}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\Bigg|_0^y -$$

$$-\frac{p(y)}{P^2(y)}\int_0^y \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\left(P(y)-P(y-u)\right)P(u)\cdot\lambda(u)}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\right\}\cdot S(u)du =$$

$$= \frac{p(y)\cdot\lambda(y)\cdot S(y)}{(y+1)\left(\ln(y+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}} - \frac{p(y)}{P^2(y)}\int_0^y \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\left(P(y)-P(y-u)\right)P(u)}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\right\}\lambda(u)\cdot S(u)du-$$

$$-\frac{p(y)}{P^2(y)}\int_0^y \frac{\left(P(y)-P(y-u)\right)P(u)}{(u+1)\left(\ln(u+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\,\lambda'(u)\cdot S(u)du = I_{21}+I_{22}+I_{23}.$$

Но в виду леммы 4

$$\int_0^A |I_{21}|dy = O\left(\int_0^A \frac{\lambda(y)|S(y)|dy}{(y+1)\left(\ln(y+2)\right)^{k-\frac{1}{2}}}\right) = O(1), \qquad \text{когда } A \to \infty.$$

По лемме 6: $\int_0^A |I_{22}|dy = O(1)$, а по лемме 7: $\int_0^A |I_{23}|dy = O(1)$. Объединяя полученные результаты, приходим к заключению, что $\int_0^\infty |\tau'(y)|dy$ сходится. Это завершает доказательство теоремы 1.

Библиографические ссылки

1. *Вороной Г. Ф.* Расширение понятия о пределе суммы бесконечного ряда / Г.Ф. Вороной // Собр. соч: В 3 т. – Киев, 1952. – Т. 3. – С. 9–10.
2. *Nörlund M.E.* Sur une application des fonctions permutables // Zunds Universitets Arsskift (2), 1919. — V. 16, № 3. — P. 1–10.
3. *Титчмарш Е. С.* Введение в теорию интеграла Фурье / Е. С. Титчмарш. – М, 1948. — 479 с.

Надійшло до редколегії 11.05.2012