ISSN 9125 0912. *Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2012, вип.* **17**

УДК 517.5

Условия единственности элемента наилучшего несимметричного L_1-приближения для непрерывных вектор-функций одномерным подпространством

М. Е. Ткаченко*, **В. Н. Трактинская****

* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: mtkachenko2009@ukr.net*

** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: victoria-dp@yandex.ru*

Отриманi необхiднi i достатнi умови єдиностi елемента найкращого $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$- наближення неперервних на метричному компактi векторнозначних функцiй одновимiрним пiдпростором.

Ключовi слова: єдинiсть елемента найкращого несиметричного наближення, векторнозначнi функцiї, одновимiрний пiдпростiр.

Получены необходимые и достаточные условия единственности наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-приближения непрерывных на метрическом компакте векторнозначных функций одномерным подпространством.

Ключевые слова: единственность элемента наилучшего несимметричного приближения, векторнозначные функции, одномерное подпространство.

The necessary and sufficient conditions of the unicity of the best $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-approximant for the continuous vector-valued functions on the metric compact by one-dimensional subspace are obtained.

Key words: the unicity of the best nonsymmetric approximant, vector-valued functions, one-dimensional subspace.

Пусть Q – метрический компакт, Σ – σ-поле борелевских подмножеств Q и μ – неотрицательная, конечная, безатомная мера, положительная на любом непустом открытом подмножестве Σ.

Через $C(Q)$ обозначим пространство непрерывных функций $f : Q \to \mathbf{R}$, через $\mathbf{R}^m$ – пространство векторов $\bar{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$, а через $C(Q, \mathbf{R}^m)$ – пространство вектор-функций $f : Q \to \mathbf{R}^m$ с нормой

$$||\bar{f}||_{1;\bar{\alpha},\bar{\beta}} = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{Q} |f_i(x)|_{\alpha_i,\beta_i} d\mu(x),$$

где $|f(x)|_{\alpha,\beta} = \alpha f_+(x) + \beta f_-(x)$,

$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m), \bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m), \alpha_i > 0, \beta_i > 0, i = 1, 2, ..., m,$
$\bar{f} = (f_1, f_2, ..., f_m), f_i \in C(Q), i = 1, 2, ..., m.$
Пусть $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m)$, $H \subset C(Q)$.

Величину

$$E(\bar{f}, H)_{1;\bar{\alpha},\bar{\beta}} = \inf\{\|\bar{f} - \bar{u}\|_{1;\bar{\alpha},\bar{\beta}} : \bar{u} = (u, u, ..., u), u \in H\} \qquad (1)$$

будем называть наилучшим $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$- приближением вектор-функции $\bar{f}$ множеством H в метрике L_1, а функцию из H, реализующую точную нижнюю грань в правой части равенства (1), - элементом наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$- приближения $\bar{f}$ множеством H в метрике L_1.

Множество нулей функции f будем обозначать Z_f.

Пусть

$$H' = \{\bar{h} = (h_1, ..., h_m) \in C(Q, \mathbf{R}^m) : \exists p_{\bar{h}} \in H \quad \forall x \in Q \quad |h_i(x)| = |p_{\bar{h}}(x)|, i = \overline{1, m}\}.$$

Нам понадобится критерий единственности элемента наилучшего несимметричного L_1-приближения для непрерывных на метрическом компакте функций, который вытекает из теорем 1, 2 и леммы 3 из [2].

Теорема 1. *Пусть H – конечномерное подпространство $C(Q)$. Любая функция $\bar{f} \in C(Q, \boldsymbol{R}^m)$ имеет единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-приближения в H в метрике L_1 тогда и только тогда, когда для любой функции $\bar{h} \in H' \backslash \{\bar{0}\}$ существует функция $p \in H$ такая, что*

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{Q \backslash Z_{h_i}} p(x) \cdot \mathrm{sgn}_{\alpha_i, \beta_i} h_i(x) d\mu(x) > \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{Z_{h_i}} |p(x)|_{\beta_i, \alpha_i} d\mu(x),$$

где $\mathrm{sgn}_{\alpha,\beta} f(x) = \alpha \cdot \mathrm{sgn} f_+(x) - \beta \cdot \mathrm{sgn} f_-(x)$.

В качестве приближающего пространства будем рассматривать одномерное подпространство вида

$$H_1 = \{a \cdot u(x), \quad a \in \mathbf{R}\},$$

где $u(x)$ – действительная, непрерывная функция, определенная на метрическом компакте Q, не равная тождественно нулю.

Для указанного подпространства теорема 1 примет вид

Теорема 2. *Любая функция $\bar{f} \in C(Q, \boldsymbol{R}^m)$ имеет единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-приближения в H_1 в метрике L_1 тогда и только тогда, когда для любой функции $\bar{h} = (h_1, h_2, ..., h_m) \in H' \backslash \{\bar{0}\}$*

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{Q \backslash Z_u} u(x) \cdot \mathrm{sgn}_{\alpha_i, \beta_i} h_i(x) d\mu(x) \neq 0. \qquad (2)$$

Будем рассматривать вопросы единственности элемента наилучшего $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$-приближения для функций из пространства $C(Q,\mathbf{R}^m)$ подпространством H_1. Такие задачи рассматривались в случае $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_m=\alpha$, $\beta_1=\beta_2=...=\beta$ в [5 и 6], для функций со значениями в КВ-пространстве – в [3], для $\alpha=\beta=1$ для банаховозначных функций в [1], а для вектор-функций в [4].

Теорема 3. *Пусть* $Q\backslash Z_u=\bigcup\limits_{j=1}^{n}Q_j$, $\bigcap\limits_{j=1}^{n}Q_j=\emptyset$, *где* Q_j *– связные компакты. Тогда:*

1) если существует множество индексов $M\subset\{1,2,...,m\}$ *такое, что* $\sum\limits_{i\in M}\alpha_i=\sum\limits_{i\notin M}\beta_i$, *то подпространство* H_1 *не является множеством единственности элемента наилучшего* $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$*-приближения в* $C(Q,\boldsymbol{R}^m)$*;*

2) в противном случае подпространство H_1 *является множеством единственности элемента наилучшего* $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$*-приближения в* $C(Q,\boldsymbol{R}^m)$ *тогда и только тогда, когда для любых наборов индексов* $M_j\subset\{1,2,...,m\}$, $j=\overline{1,n}$

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i\in M_j}\alpha_i-\sum_{i\notin M_j}\beta_i\Big)\int\limits_{Q_j}u(x)d\mu(x)\neq 0. \tag{3}$$

Доказательство теоремы 3. 1) Пусть $\exists M\subset\{1,2,...,m\}$ такое, что $\sum\limits_{i\in M}\alpha_i=\sum\limits_{i\notin M}\beta_i$

Рассмотрим функцию $\bar{h}=(h_1,h_2,...,h_m)\in H'$ такую, что

$$h_i(x)=|u(x)|, i\in M,\quad h_i(x)=-|u(x)|, i\notin M,\quad \forall x\in Q.$$

Тогда правая часть неравенства (2) примет вид

$$\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{Q\backslash Z_u}u(x)\cdot sgn_{\alpha_i,\beta_i}h_i(x)d\mu(x)=\sum_{i\in M}\alpha_i\int\limits_{Q\backslash Z_u}u(x)d\mu(x)-\sum_{i\notin M}\beta_i\int\limits_{Q\backslash Z_u}u(x)d\mu(x)=$$

$$=\Big(\sum_{i\in M}\alpha_i-\sum_{i\notin M}\beta_i\Big)\int\limits_{Q\backslash Z_u}u(x)d\mu(x)=0.$$

По теореме 2 подпространство H_1 не является множеством единственности элемента наилучшего $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$-приближения для пространства $C(Q,\mathbf{R}^m)$.

2) Пусть подпространство H_1 является множеством единственности элемента наилучшего $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$-приближения для $C(Q,\mathbf{R}^m)$, но существуют множества $\tilde{M}_j\subset\{1,...,m\}$, $j=1,2,...,n$, такие что

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i\in\tilde{M}_j}\alpha_i-\sum_{i\notin\tilde{M}_j}\beta_i\Big)\int\limits_{Q_j}u(x)d\mu(x)=0.$$

Рассмотрим функцию $\bar{h}_0 = (h_1^0, ..., h_m^0) \in H'$ такую, что $\forall x \in Q_j,\ j = 1, 2, ..., n$

$$h_i^0 = |u(x)|, i \in \tilde{M}_j, \quad h_i^0(x) = -|u(x)|, i \notin \tilde{M}_j.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{Q \setminus Z_u} u(x) \cdot sgn_{\alpha_i,\beta_i} h_i^0(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{Q_j} u(x) \sum_{i=1}^{m} sgn_{\alpha_i,\beta_i} h_i^0(x) d\mu(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{Q_j} u(x) d\mu(x) \cdot (\sum_{i \in \tilde{M}_j} \alpha_i - \sum_{i \notin \tilde{M}_j} \beta_i) = 0,$$

по теореме 2 получим противоречие с тем, что H_1 является множеством единственности элемента наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-приближения для пространства $C(Q, \mathbf{R}^m)$.

Пусть теперь имеет место неравенство (3) и предположим, что подпространство H_1 не является множеством единственности элемента наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-приближения для пространства $C(Q, \mathbf{R}^m)$, тогда по теореме 2 существует функция $\bar{h}_0 = (h_1^0, h_2^0, ..., h_m^0) \in H' \setminus \bar{0}$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{Q \setminus Z_u} u(x) \cdot sgn_{\alpha_i,\beta_i} h_i^0(x) d\mu(x) = 0.$$

Для каждого $j = 1, 2, ..., n$ существует набор индексов $M_j \subset \{1, 2, ..., m\}$ такой, что $\forall x \in Q_j$

$$sgn_{\alpha_i,\beta_i} h_i^0(x) = \alpha_i, i \in M_j, \quad sgn_{\alpha_i,\beta_i} h_i^0(x) = -\beta_i, i \notin M_j.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{Q \setminus Z_u} u(x) \cdot sgn_{\alpha_i,\beta_i} h_i^0(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{Q_j} u(x) \sum_{i=1}^{m} sgn_{\alpha_i,\beta_i} h_i^0(x) d\mu(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i \in M_j} \alpha_i - \sum_{i \notin M_j} \beta_i) \int\limits_{Q_j} u(x) d\mu(x) \neq 0$$

в силу неравенства (3).

Полученное противоречие доказывает теорему.

Библиографические ссылки

1. *Бабенко В. Ф.* Достатні умови єдиності елемента найкращого L_1-наближення для функцій зі значеннями у банаховому просторі / В. Ф. Бабенко, М. Є. Ткаченко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Математика, 2003. — Вип. 8. — С. 19–25.

2. *Ткаченко М. Е.* О единственности элемента наилучшего приближения для векторнозначных функций непрерывных на метрическом компакте /М. Е. Ткаченко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Математика, 2001. — С. 121-127.
3. *Ткаченко М. Є.* Достатні умови єдиності елемента найкращого несиметричного L_1-наближення для функцій зі значеннями в КВ-просторі / М. Є. Ткаченко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Математика, 2006. — Вип. 11. — С. 90–97.
4. *Ткаченко М. Е.* Условия единственности элемента наилучшего L_1-приближения для вектор-функций подпространством постоянных отображений / М. Е. Ткаченко, В. Н. Трактинская // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Математика, 2008. — Вип. 13. — С. 144–148.
5. *Ткаченко М. Е.* Условия единственности элемента наилучшего несимметричного L_1-приближения для вектор-функций подпространством постоянных отображений / М. Е. Ткаченко, В. Н. Трактинская // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Математика, 2009. — Вип. 14. — С. 133–139.
6. *Ткаченко М. Е.* Условия единственности элемента наилучшего несимметричного L_1-приближения для вектор-функций одномерным подпространством / М. Е. Ткаченко, В. Н. Трактинская // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Математика, 2011. — Вип. 16. — С. 123–128.

Надійшло до редколегії 01.05.2012