ISSN 2312 9557. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2016, вип. **21**

УДК 517.5

Р. О. Биличенко

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,
Днепропетровск, 49050. *E-mail: roman.bilichenko@ukr.net*

Приближение неограниченного функционала на классе элементов гильбертова пространства, определяемого степенями нормального оператора

Найдена величина наилучшего приближения функционала $(A^k x, f)$ на классе $\{x \in D(A^r) : \|A^r x\| \leq 1\}$ линейными ограниченными функционалами для нормального оператора A гильбертова пространства H $(k < r,\ f \in H)$.

Ключевые слова: нормальный оператор, функционал, разложение единицы, гильбертово пространство.

Знайдено величину найкращого наближення функціонала $(A^k x, f)$ на класі $\{x \in D(A^r) : \|A^r x\| \leq 1\}$ лінійними обмеженими функціоналами для нормального оператора A гільбертового простору H $(k < r,\ f \in H)$.

Ключові слова: нормальний оператор, функціонал, розклад одиниці, гільбертів простір.

The best approximation of unbounded functional $(A^k x, f)$ on the class $\{x \in D(A^r) : \|A^r x\| \leq 1\}$ by linear bounded functionals for a normal operator A in the Hilbert space H $(k < r,\ f \in H)$.

Key words: normal operator, functional, decomposition of unity, Hilbert space.

1. Введение

Задача приближения неограниченного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов банахова пространства появилась в исследованиях С.Б. Стечкина [7] в 1965 г. В работе [8] 1967 г. дана постановка задачи и приведено решение для операторов дифференцирования малого порядка. В дальнейшем эта задача активно изучалась многими математиками. Обзор некоторых полученных результатов можно найти в [1] (см. также [6, гл. 7]).

Через $L^r_{2,2}(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$ обозначим пространство функций $x \in L_2(\mathbb{R})$, $(r-1)$-я производная которых локально абсолютно непрерывна и r-я производная принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$. Пусть также $C(\mathbb{R})$ – пространство непрерывных ограниченных функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

© *БИЛИЧЕНКО Р.О., 2016*

В 1968 г. Л.В. Тайков [9] рассмотрел задачу Стечкина для оператора дифференцирования в следующей форме. Для $x \in L_2(\mathbb{R})$ $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$ и числа $N > 0$ положим

$$u_N = \inf_{\|T\| \le N} \sup_{\|x^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \le 1} \|x^{(k)} - T(x)\|_{C(\mathbb{R})}, \tag{1}$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным линейным операторам $T : L_2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ с нормой, не превосходящей N.

Задача состоит в вычислении величины u_N и нахождении экстремального оператора, на котором в (1) достигается нижняя грань.

Тайков установил, что для заданного числа $N = ah^{-k-1/2}$, $h > 0$, где

$$a = \left\{ \frac{r-k-1/2}{2r^2} \frac{1}{\sin \pi \frac{2k+1}{2r}} \right\}^{1/2},$$

справедливо равенство $u_N = bh^{r-k-1/2}$, где

$$b = \left\{ \frac{k+1/2}{2r^2} \frac{1}{\sin \pi \frac{2k+1}{2r}} \right\}^{1/2}.$$

Заметим, что эта задача эквивалентна задаче приближения неограниченного функционала $x^{(k)}(0)$ на классе $\{x \in L^r_{2,2}(\mathbb{R}) : \|x^{(r)}\| \le 1\}$ ограниченными функционалами.

Также Тайковым получены неулучшаемые неравенства, оценивающие для $x \in L^r_{2,2}(\mathbb{R})$ равномерную норму k-й производной, $0 < k < r$, через L_2 – нормы x и $x^{(r)}$ в аддитивной и мультипликативной формах. Приведем это неравенство в аддитивной форме. Для любого $h > 0$

$$\|x^{(k)}\|_{C(\mathbb{R})} \le ah^{-k-1/2}\|x\|_{L_2(\mathbb{R})} + bh^{r-k-1/2}\|x^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{2}$$

В 1990 г. А.Ю. Шадрин [10] получил аналог неравенства Тайкова для периодических функций.

В 2012 г. В.Ф. Бабенко и Р.О. Биличенко обобщили результат Тайкова на произвольные степени самосопряженного оператора A и произвольный функционал в гильбертовом пространстве H. В [4] получено решение задачи наилучшего приближения функционала $F_f = (A^k x, f)$ ($D(A)$ – область определения оператора A; $f \in H$; $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$; $x \in D(A^r)$) на классе $Q = \{x \in D(A^r) : \|A^r x\| \le 1\}$ линейными ограниченными функционалами, т. е. задачи отыскания величины

$$u_N = \inf_{g \in H, \|g\| \le N} \sup_{x \in Q} |F_f(x) - g(x)|, \quad N > 0. \tag{3}$$

Они установили, что для заданного

$$N = \Phi(h) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(1+ht^{2r})^2} d\left(E_t f, f\right) \right\}^{1/2},$$

$h > 0$, справедливо равенство $u_N = h\Psi(h)$, где

$$\Psi(h) = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2(r+k)}}{(1+ht^{2r})^2} d\left(E_t f, f\right) \right\}^{1/2}.$$

Здесь E_t — разложение единицы, соответствующее самосопряженному оператору A.

Также в [4] получено точное аддитивное неравенство типа (2). Для любых $x \in D(A^r)$ и $h > 0$ справедливо неравенство

$$\left|\left(A^k x, f\right)\right| \leq h\Psi(h)\left\|A^r x\right\| + \Phi(h)\|x\|.$$

Пусть A – линейный неограниченный нормальный оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(A)$, k, r – натуральные числа ($k < r$). Напомним, что замкнутый плотно определенный оператор A называется нормальным, если $A^*A = AA^*$. Пусть также $Q = \{x \in D(A^r) \ : \|A^r x\| \leq 1\}$ и для $f \in H$ $F_f(x) := (A^k x, f),\ x \in D(A^r)$.

В [3] В.Ф. Бабенко и Р.О. Биличенко доказали, что для любого $x \in D(A^r)$ и любого $\tau > 0$ справедливо точное неравенство

$$\left|(A^k x, f)\right| \leq \left\{ \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{|z|^{2k}}{1+\tau|z|^{2r}}\, d\left(E_z f, f\right) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\|x\|^2 + \tau\left\|A^r x\right\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (4)$$

Здесь E_z — разложение единицы, соответствующее нормальному оператору A.

В данной публикации получено решение задачи наилучшего приближения функционала F_f на классе Q линейными ограниченными функционалами, т. е. задачи отыскания величины (3), а также точное аддитивное неравенство типа (2) для нормального оператора A.

2. Вспомогательные сведения

Приведем некоторые сведения из спектральной теории нормальных операторов, которые можно найти, например, в [5].

Пусть Y – абстрактное множество, $\mathcal{R}$ – некоторая σ-алгебра его подмножеств. Разложением единицы называется операторнозначная функция $\mathcal{R} \ni \alpha \to E_\alpha$, значения которой – проекторы в гильбертовом пространстве H, удовлетворяющая условиям:

а) $E = 0$, $E_Y = I$ (I – тождественный оператор);

б) для любой последовательности α_j, состоящей из непересекающихся множеств из $\mathcal{R}$, справедливо равенство

$$E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \alpha_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} E(\alpha_j),$$

где ряд сходится в смысле сильной сходимости.

Для любого $x \in H$ функция множеств $\mathcal{R} \ni \alpha \to (E_\alpha x, x) = \|E_\alpha x\|^2$ является неотрицательной конечной мерой на $\mathcal{R}$.

Согласно спектральной теореме каждому нормальному оператору A соответствует разложение единицы E, заданное на σ - алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ борелевских множеств комплексной плоскости, такое, что имеет место равенство

$$A = \int\limits_{\mathbb{C}} z\, dE_z,$$

которое называется спектральным разложением оператора A.

Вектор x принадлежит $D(A)$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |z|^2\, d\left(E_z x, x\right) < \infty,$$

и если $x \in D(A)$, то

$$Ax = \int\limits_{\mathbb{C}} z\, dE_z x, \quad \|Ax\|^2 = \int\limits_{\mathbb{C}} |z|^2\, d\left(E_z x, x\right) < \infty.$$

Для $x \in D(A^k)$, $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k x = \int\limits_{\mathbb{C}} z^k\, dE_z x, \quad \left\|A^k x\right\|^2 = \int\limits_{\mathbb{C}} |z|^{2k}\, d\left(E_z x, x\right). \tag{1}$$

Применив спектральное разложение (1), для $x \in D\left(A^r\right)$ и $f \in H$ запишем

$$F_f(x) = (A^k x, f) = \left(\int\limits_{\mathbb{C}} z^k\, dE_z x, f\right) = \int\limits_{\mathbb{C}} z^k\, d\left(E_z x, f\right). \tag{2}$$

3. Основные результаты

Для нормального оператора A, соответствующего ему разложения единицы E_z и заданного элемента $f \in H$ определим функцию $\Phi(h)$, $h > 0$ следующим образом:

$$\Phi(h) := \left\{\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{|z|^{2k}}{(1 + h|z|^{2r})^2} d\left(E_z f, f\right)\right\}^{1/2}.$$

Для любого N, $0 < N < \|A^k f\|$ ($0 < N < \infty$, если оператор A неограничен и $f \notin D(A^k)$) уравнение относительно h

$$N = \Phi(h) \tag{1}$$

имеет единственное решение.

Положим также

$$\Psi(h) := \left\{ \int_{\mathbb{C}} \frac{|z|^{2(r+k)}}{(1+h|z|^{2r})^2} d\left(E_z f, f\right) \right\}^{1/2}.$$

Доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, A – нормальный оператор в гильбертовом пространстве H, $f \in H$, числа N и $h > 0$ связаны соотношением* (1) . *Тогда справедливо равенство*

$$u_N = \inf_{g \in H, \|g\| \le N} \sup_{x \in Q} |F_f(x) - g(x)| = h\Psi(h). \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, A – нормальный оператор в гильбертовом пространстве H, $f \in H$. Тогда для любых $x \in D(A^r)$ и $h > 0$ справедливо неравенство*

$$\left|\left(A^k x, f\right)\right| \le h\Psi(h)\, \|A^r x\| + \Phi(h)\|x\|. \tag{3}$$

Неравенство (3) *обращается в равенство для элемента*

$$x_h = \int_{\mathbb{C}} \frac{\overline{z}^k}{1+h|z|^{2r}}\, dE_z f. \tag{4}$$

Доказательство теоремы 1. Сначала оценим сверху величину U_N.

В качестве приближающего рассмотрим функционал

$$g_h(x) = \int_{\mathbb{C}} \frac{|z|^k}{1+h|z|^{2r}} d\left(E_z x, f\right).$$

Покажем, что $\|g_h\| \le N$. Действительно

$$|g_h(x)| = \left| \int_{\mathbb{C}} \frac{|z|^k}{1+h|z|^{2r}} d\left(E_z x, f\right) \right| \le$$

$$\le \left\{ \int_{\mathbb{C}} \frac{|z|^{2k}}{(1+h|z|^{2r})^2} d\left(E_z f, f\right) \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{C}} d\left(E_z x, x\right) \right\}^{1/2} = \Phi(h)\|x\| = N\|x\|.$$

Если $x \in Q$, то, учитывая (2), получаем

$$u_N \le |F_f(x) - g_h(x)| = \left|\left(A^k x, f\right) - g_h(x)\right| = h \left| \int_{\mathbb{C}} \frac{|z|^{r+k}}{1+h|z|^{2r}}\, |z|^r\, d\left(E_z x, f\right) \right| \le$$

$$\le h \left\{ \int_{\mathbb{C}} \frac{|z|^{2(r+k)}}{(1+h|z|^{2r})^2}\, d\left(E_z f, f\right) \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{C}} |z|^{2r}\, d\left(E_z x, x\right) \right\}^{1/2} = h\Psi(h)\, \|A^r x\| \le h\Psi(h).$$

Таким образом, оценка сверху для величины u_N получена. Прежде, чем доказывать точность этой оценки, докажем теорему 2.

Доказательство теоремы 2. Для любых $x \in D(A^r)$ и $N > 0$ имеет место неравенство

$$|F_f(x)| \leq u_N \|A^r x\| + N\|x\|. \tag{5}$$

Учитывая полученную выше оценку для u_N, для h такого, что $N = \Phi(h)$, получаем

$$|F_f(x)| = \left|\left(A^k x, f\right)\right| \leq h\Psi(h)\, \|A^r x\| + \Phi(h)\|x\|.$$

То есть для любых $h > 0$ и $x \in D(A^r)$ справедливо неравенство (3).

Покажем, что неравенство (3) является точным в том смысле, что для элемента $x_h \in D\left(A^r\right)$, определенного равенством (4), в (3) имеет место знак равенства.

Очевидно, что для x_h

$$\|x_h\|^2 = \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{|z|^{2k}}{\left(1 + h|z|^{2r}\right)^2}\, d\left(E_z f, f\right). \tag{6}$$

Кроме того, для $k, r \in \mathbb{N}$ имеют место равенства:

$$A^k x_h = \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\overline{z}^k z^k}{1 + h|z|^{2r}}\, dE_z f, \tag{7}$$

$$A^r x_h = \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\overline{z}^k z^r}{1 + h|z|^{2r}}\, dE_z f. \tag{8}$$

Из (8) следует равенство

$$\|A^r x_h\|^2 = \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{|z|^{2(r+k)}}{\left(1 + h|z|^{2r}\right)^2}\, d\left(E_z f, f\right). \tag{9}$$

Из (2) и (7) следует, что

$$\left(A^k x_h, f\right) = \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{|z|^{2k}}{1 + h|z|^{2r}} d\left(E_z f, f\right). \tag{10}$$

Подставляя (10), (6) и (9) в (3), получаем верное равенство. Точность неравенства (3) доказана и знак равенства в (3) достигается на элементе x_h, определенном в (4).

Вернемся к доказательству того, что

$$u_N = h\Psi(h).$$

Для элемента $y_h = \dfrac{x_h}{\|A^r x_h\|}$ неравенство (3) обращается в равенство

$$|F_f(y_h)| = h\Psi(h) + \Phi(h)\|y_h\|,$$

а неравенство (5) в случае $N = \Phi(h)$ принимает вид

$$|F_f(y_h)| \le u_N + \Phi(h)\|y_h\|.$$

Сопоставляя эти неравенства, получаем

$$u_N \ge h\Psi(h).$$

Библиографические ссылки

1. *Арестов, В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи [Текст] / В. В. Арестов // Успехи мат. наук. — 1996. — Т. 51, № 6 — С. 89–124.
2. *Бабенко, В. Ф.* Неравенства типа Тайкова для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве [Текст] / В. Ф. Бабенко, Р. О. Биличенко // Тр. ИПММ. — 2010. — Т. 21 — С. 11–18.
3. *Бабенко, В. Ф.* Неравенство типа Тайкова для степеней нормальных операторов в гильбертовом пространстве [Текст] / В. Ф. Бабенко, Р. О. Биличенко // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Математика. — 2011. — Вип. 16. — С. 3–7.
4. *Бабенко, В. Ф.* Приближение неограниченных функционалов ограниченными в гильбертовом пространстве [Текст] / В. Ф. Бабенко, Р. О. Биличенко // Там же. — 2012. — Вип. 17. — С. 3–10.
5. *Березанский, Ю. М.* Функциональный анализ [Текст]/ Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. – К.: Вища шк., 1990. — 600 с.
6. *Н*еравенства для производных и их приложения [Текст]/ В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов. – К.: Наук. думка, 2003. — 590 с.
7. *Стечкин, С. Б.* Неравенства между нормами производных произвольной функции [Текст]/ С. Б. Стечкин // Acta scient. math. —1965. — №26. — P. 225–230.
8. *Стечкин, С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов [Текст]/ С. Б. Стечкин // Мат. заметки. — 1967. — Т. 1, № 2. — С. 137–148.
9. *Тайков, Л. В.* Неравенства типа Колмогорова и формулы численного дифференцирования [Текст]/ Л.В. Тайков // Там же. — 1968. — Т. 4, № 2. — С. 223–238.
10. *Шадрин, А. Ю.* Неравенства типа Колмогорова и оценки сплайн-интерполяции для периодических классов W_2^m [Текст]/ А.Ю. Шадрин // Там же. — 1990. — Т. 48, № 4. — С. 132–139.

Надійшла до редколегії 17.05.2016