УДК 517.5

**С. Б. Вакарчук*, М. Б. Вакарчук****

* Днепропетровский университет имени Альфреда Нобеля,
Днепропетровск, 49000. *E-mail: sbvakarchuk@mail.ru*
** Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,
Днепропетровск, 49050. *E-mail: vacarchuk@yandex.ru*

# Наилучшее полиномиальное приближение, производные дробного порядка и поперечники классов функций в $L_2$

**На классах $2\pi$-периодических функций $\mathcal{W}^\alpha(K_\beta,\Phi)$, где $\alpha,\beta\in(0,\infty)$, определенных при помощи $K$-функционалов $K_\beta$, производных дробного порядка $\alpha$ и мажорант $\Phi$, вычислены точные значения различных $n$-поперечников в пространстве $L_2$.**

*Ключевые слова: наилучшее полиномиальное приближение, тригонометрический полином, $K$-функционал, производная дробного порядка $\alpha$, $n$-поперечник.*

**На класах $2\pi$-перiодичних функцiй $\mathcal{W}^\alpha(K_\beta,\Phi)$, де $\alpha,\beta\in(0,\infty)$, визначених за допомогою $K$-функцiоналiв $K_\beta$, похiдних дробового порядку $\alpha$ та мажорант $\Phi$, обчислено точнi значення рiзних $n$-поперечникiв у просторi $L_2$.**

*Ключовi слова: найкраще полiномiальне наближення, тригонометричний полiном, $K$-функцiонал, похiдна дробового порядку $\alpha$, $n$-поперечник.*

**On the classes of $2\pi$-periodic functions $\mathcal{W}^\alpha(K_\beta,\Phi)$, where $\alpha,\beta\in(0,\infty)$, defined by $K$-functionals $K_\beta$, fractional derivatives of order $\alpha$ and majorants $\Phi$ the exact values of different $n$-widths have been computed in the space $L_2$.**

*Key words: the best polynomial approximation, trigonometric polynom, $K$-functional, fractional derivative of order $\alpha$, $n$-width.*

Пусть $L_2$ — пространство измеримых по Лебегу $2\pi$-периодических функций с конечной нормой

$$\|f\|=\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^2dx\right\}^{1/2}.$$

Для $\alpha\in(0,\infty)$ запишем биномиальные коэффициенты

$$\binom{\alpha}{0}:=1;\ \ \binom{\alpha}{1}:=\alpha;\ \ \binom{\alpha}{j}:=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-j+1)}{j!}\ , \tag{1}$$

где $j\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$. Отметим, что в случае $\alpha=m$, где $m\in\mathbb{N}$, полагают

$$\binom{m}{j}:=\begin{cases}\dfrac{m!}{j!(m-j)!}, & \text{если } j=0,...,m;\\ 0, & \text{если } j=m+1,m+2,....\end{cases} \tag{2}$$

 

Поскольку $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{j}\right| < \infty$ (см., напр., [1, с. 279]), то разность дробного порядка $\alpha$ функции $f \in L_2$ с шагом $h \in \mathbb{R}$, т.е.

$$\Delta_h^\alpha f(x) := \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x-jh) \tag{3}$$

определена почти всюду на $\mathbb{R}$ и принадлежит пространству $L_2$. Если для $f \in L_2$ существует функция $g \in L_2$ такая, что

$$\lim_{h\to 0+}\left\|\frac{\Delta_h^\alpha f}{h^\alpha} - g\right\| = 0,$$

то $g$ называют сильной производной Лиувилля – Грюнвальда – Летникова порядка $\alpha$ функции $f$ и обозначают символом $D^\alpha f$ (см., напр., [1 – 3]). Через $L_2^\alpha$, где $\alpha \in (0,\infty)$, обозначим множество функций $f \in L_2$, для которых производная дробного порядка $\alpha$ принадлежит пространству $L_2$, т.е. $D^\alpha f \in L_2$. Отметим, что для $2\pi$ -периодических функций сильная производная Лиувилля – Грюнвальда – Летникова порядка $\alpha$ почти всюду совпадает с дробной производной Вейля того же порядка [1, с. 263]. При этом

$$D^\alpha f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty}(ij)^\alpha c_j(f)e^{ijx}, \tag{4}$$

где

$$c_j(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ijx}dx.$$

Напомним (см., напр., [2; 4 – 6]), что модулем непрерывности дробного порядка $\beta \in (0,\infty)$ функции $f \in L_2$ называют величину

$$\omega_\beta(f,t) := \sup\left\{\left\|\Delta_h^\beta f\right\| : |h| \le t\right\}, \tag{5}$$

где $t > 0$. Из соотношений (1) — (3) следует, что характеристика гладкости (5) при $\beta \in \mathbb{N}$ будет обычным модулем непрерывности соответствующего порядка. Свойства модуля непрерывности (5) для $2\pi$-периодических функций можно найти в работах [2; 4; 6].

Наряду с модулями непрерывности дробного порядка $\beta \in (0,\infty)$ в задачах теории аппроксимации $2\pi$-периодических функций применяются и $K$-функционалы (см., напр., [2; 6]). В случае пространства $L_2$ для произвольной функции $f$ имеем

$$K(f,t,L_2,L_2^\beta) := \inf\left\{\|f-g\| + t\left\|D^\beta g\right\| : g \in L_2^\beta\right\}, \tag{6}$$

где $t > 0$. Условимся всюду далее вместо $K(f,t,L_2,L_2^\beta)$ применять обозначение $K_\beta(f,t)_2$. Из результатов работы [2] следует, что между характеристиками (5) и (6) функции $f \in L_2$ имеет место следующая связь: $\omega_\beta(f,t) \asymp K_\beta(f,t^\beta)$, где $t > 0$. Ранее в работах [7] – [11] уже отмечалось, что $K$-функционалы, как и модули непрерывности, являются самодостаточными характеристиками гладкости функций и их целесообразно применять для определения классов функций при решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации. Данную статью можно рассматривать как продолжение указанных исследований для $K$-функционалов (6) в случае $2\pi$-периодических функций из $L_2$.

Под $\mathcal{T}_n$, где $n \in \mathbb{Z}_+$, понимаем подпространство тригонометрических полиномов степени, не превосходящей $n$, т.е. $\mathcal{T}_n := \Big\{T_n : T_n(x) = \sum\limits_{j=-n}^{n} a_j e^{ijx}\Big\}$, а величину наилучшего полиномиального приближения произвольной функции $f \in L_2$ элементами подпространства $\mathcal{T}_n$ обозначим через $E_n(f) := \inf\{\|f - T_n\| : T_n \in \mathcal{T}_n\}$. Хорошо известно, что $E_n(f) = \|f - S_n(f)\|$, где $S_n(f,x) := \sum\limits_{j=-n}^{n} c_j(f) e^{ijx}$ — частная сумма $n$-го порядка ряда Фурье функции $f \in L_2$.

Далее отношение $0/0$ полагаем равным нулю.

**Теорема 1.** *Пусть* $\alpha, \beta \in (0,\infty)$*;* $n \in \mathbb{Z}_+$*. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^\alpha \\ f \not\equiv const}} \frac{(n+1)^\alpha E_n(f)}{K_\beta(D^\alpha f, 1/(n+1)^\beta)_2} = 1. \tag{7}$$

*Доказательство.* Пусть $f$ есть произвольная функция из множества $L_2^\alpha$, не равная константе. Тогда

$$E_n(f) = \Big\{\sum_{|j|=n+1}^{\infty} |c_j(f)|^2\Big\}^{1/2} = \Big\{2\sum_{j=n+1}^{\infty} |c_j(f)|^2\Big\}^{1/2}.$$

Поскольку

$$c_j(D^\alpha f) = (ij)^\alpha c_j(f), \tag{8}$$

где $j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, то в силу (4) и (8) имеем

$$E_n(f) = \Big\{2\sum_{|j|=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^{2\alpha}} |c_j(D^\alpha f)|^2\Big\}^{1/2} \le \frac{1}{(n+1)^\alpha}\Big\{2\sum_{|j|=n+1}^{\infty} |c_j(D^\alpha f)|^2\Big\}^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^\alpha} E_n(D^\alpha f) \le \frac{1}{(n+1)^\alpha} \|D^\alpha f - S_n(g)\|, \tag{9}$$

где $g$ — произвольная функция из множества $L_2^\beta$, а $S_n(g)$ — частная сумма $n$-го порядка её ряда Фурье. Поскольку

$$\|g - S_n(g)\| \le \frac{1}{(n+1)^\beta} E_n(D^\beta g), \tag{10}$$

то из соотношений (9) — (10) для $f \in L_2^\alpha$ и любой функции $g \in L_2^\beta$ получаем

$$E_n(f) \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha} \{\|D^\alpha f - g\| + \|g - S_n(g)\|\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^\alpha} \left\{\|D^\alpha f - g\| + \frac{1}{(n+1)^\beta}\|D^\beta g\|\right\}. \tag{11}$$

Левая часть неравенства (11) не зависит от функции $g \in L_2^\beta$. Перейдя к вычислению нижней грани по $g \in L_2^\beta$ от правой части указанного неравенства и применяя определение $K$-функционала (6), запишем

$$E_n(f) \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha} K_\beta\left(D^\alpha f, \frac{1}{(n+1)^\beta}\right)_2.$$

Отсюда следует оценка сверху

$$\sup_{\substack{f \in L_2^\alpha \\ f \not\equiv const}} \frac{(n+1)^\alpha E_n(f)}{K_\beta(D^\alpha f, 1/(n+1)^\beta)_2} \leq 1. \tag{12}$$

Получим оценку снизу рассматриваемой экстремальной характеристики. Применив формулу (8) для произвольного тригонометрического полинома $T_{n+1}(x) = \sum\limits_{j=-(n+1)}^{n+1} a_j e^{ijx}$, запишем

$$D^\alpha T_{n+1}(x) = \sum_{j=-(n+1)}^{n+1} (ij)^\alpha a_j e^{ijx}. \tag{13}$$

Тогда на основании (13) будем иметь

$$\|D^\alpha T_{n+1}\| = \left\{2\sum_{j=1}^{n+1} j^{2\alpha}|a_j|^2\right\}^{1/2} \leq (n+1)^\alpha \|T_{n+1}\|. \tag{14}$$

Пусть далее в соотношении (6) функция $g \equiv 0$ или $g \equiv T_{n+1}$. Тогда в силу (14) из (6) получим

$$K_\beta(T_{n+1}, t^\beta)_2 \leq \min\left\{\|T_{n+1}\|;\ t^\beta \|D^\beta T_{n+1}\|\right\}. \tag{15}$$

Рассмотрим функцию $\widetilde{f}(x) = \left(e^{i(n+1)x} + e^{-i(n+1)x}\right)/2 = \cos(n+1)x$ из множества $L_2^\alpha$, для которой $E_n(\widetilde{f}) = 1$ и на основании (14) — (15)

$$K_\beta\left(D^\alpha \widetilde{f}, \frac{1}{(n+1)^\beta}\right)_2 \leq \frac{1}{(n+1)^\beta}\|D^{\alpha+\beta}\widetilde{f}\| \leq (n+1)^\alpha \|\widetilde{f}\| = (n+1)^\alpha. \tag{16}$$

Тогда в силу (16) получим

$$\sup_{\substack{f \in L_2^\alpha \\ f \not\equiv const}} \frac{(n+1)^\alpha E_n(f)}{K_\beta(D^\alpha f, 1/(n+1)^\beta)_2} \geq \frac{(n+1)^\alpha E_n(\widetilde{f})}{K_\beta(D^\alpha \widetilde{f}, 1/(n+1)^\beta)_2} \geq 1. \tag{17}$$

Требуемое равенство (7) вытекает из соотношений (12) и (17). Теорема 1 доказана.

Пусть $B$ — единичный шар в пространстве $L_2$; $\Lambda_n \subset L_2$ — $n$-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ — подпространство коразмерности $n$; $V : L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор; $V^{\perp} : L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования; $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное множество из $L_2$. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) := \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon B \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) := \inf\{\sup\{\inf\{\|f - g\| : g \in \Lambda_n\} : f \in \mathfrak{M}\} : \Lambda_n \subset L_2\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) := \inf\{\inf\{\sup\{\|f - Vf\| : f \in \mathfrak{M}\} : VL_2 \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_2\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) := \inf\{\inf\{\|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\} : \Lambda^n \subset L_2\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) := \inf\{\inf\{\sup\{\|f - V^{\perp}f\| : f \in \mathfrak{M}\} : V^{\perp}L_2 \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_2\}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским и проекционным $n$-поперечником множества $\mathfrak{M}$ в $L_2$. Между перечисленными $n$-поперечниками в гильбертовом пространстве $L_2$ имеют место следующие соотношения:

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \le d^n(\mathfrak{M}, L_2) \le d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2). \tag{18}$$

Согласно [11, с. 24] неубывающую на $[0, \infty)$ функцию $\Phi = \Phi(t)$ называют $k$-мажорантой, если функция $\Phi(t)/t^k$ не возрастает на $(0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(t) \to 0$ при $t \to 0$. В случае $k = 1$ функцию $\Phi$, удовлетворяющую указанным условиям, будем называть мажорантой. Примером мажоранты может служить произвольный выпуклый вверх обычный модуль непрерывности. Другие примеры мажорант можно найти, например, в работах [7 – 8].

Пусть $\Phi$ — произвольная мажоранта. Символом $\mathcal{W}^{\alpha}(K_{\beta}, \Phi)$, где $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, обозначим класс функций $f \in L_2^{\alpha}$, для которых производные $D^{\alpha}f$ удовлетворяют условию

$$K_{\beta}(D^{\alpha}f, t^{\beta})_2 \le \Phi(t^{\beta}),$$

где $0 < t \le 2\pi$ — любое число.

**Теорема 2.** *Пусть $\alpha, \beta \in (0, \infty)$; $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда имеют место следующие равенства:*

$$q_{2n+2}(\mathcal{W}^{\alpha}(K_{\beta}, \Phi); L_2) = q_{2n+1}(\mathcal{W}^{\alpha}(K_{\beta}, \Phi); L_2) =$$

$$= E_n(\mathcal{W}^{\alpha}(K_{\beta}, \Phi)) = \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} \Phi\Big(\frac{1}{(n+1)^{\beta}}\Big), \tag{19}$$

*где $E_n(\mathcal{W}^{\alpha}(K_{\beta}, \Phi)) := \sup\{E_n(f) : f \in \mathcal{W}^{\alpha}(K_{\beta}, \Phi)\}$, $q_m(\cdot)$ — любой из $m$-поперечников, рассмотренных выше.*

*Доказательство.* Применяя соотношения (12), (18) и определение класса $\mathcal{W}^{\alpha}(K_{\beta},\Phi)$, получаем оценки сверху

$$q_{2n+2}(\mathcal{W}^{\alpha}(K_{\beta},\Phi);L_2)\le q_{2n+1}(\mathcal{W}^{\alpha}(K_{\beta},\Phi);L_2)\le d_{2n+1}(\mathcal{W}^{\alpha}(K_{\beta},\Phi);L_2)\le$$

$$\le E_n(\mathcal{W}^{\alpha}(K_{\beta},\Phi))\le\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\Phi\Big(\frac{1}{(n+1)^{\beta}}\Big). \tag{20}$$

Для получения оценок снизу рассматриваемых экстремальных характеристик воспользуемся формулой (18), предварительно показав принадлежность шара

$$B^{*}_{2n+3}:=\Big\{T_{n+1}\in\mathcal{T}_{n+1}:\|T_{n+1}\|\le\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\Phi\Big(\frac{1}{(n+1)^{\beta}}\Big)\Big\}$$

классу $\mathcal{W}^{\alpha}(K_{\beta},\Phi)$. Поскольку мажоранта $\Phi$ удовлетворяет условию $\Phi(t_1)/t_1\ge\Phi(t_2)/t_2$, где $0<t_1\le t_2\le 2\pi$, то отсюда следует неравенство

$$\Phi\Big(t_1^{\beta}\Big)\Big/\,\Phi\Big(t_2^{\beta}\Big)\ge(t_1/t_2)^{\beta}. \tag{21}$$

В силу неравенства (14) для любого полинома $T_{n+1}\in\mathcal{T}_{n+1}$ имеем

$$\|D^{\alpha+\beta}T_{n+1}\|\le(n+1)^{\alpha+\beta}\|T_{n+1}\|. \tag{22}$$

Пусть $0<t\le 1/(n+1)$. Применяя неравенство (21), в котором полагаем $t_1:=t$ и $t_2:=1/(n+1)$, а также формулы (15) и (22), для произвольного полинома $T_{n+1}\in B^{*}_{2n+3}$ имеем

$$K_{\beta}\left(D^{\alpha}T_{n+1},t^{\beta}\right)_2\le t^{\beta}\left\|D^{\alpha+\beta}T_{n+1}\right\|\le t^{\beta}(n+1)^{\alpha+\beta}\|T_{n+1}\|\le$$

$$\le(t(n+1))^{\beta}\;\Phi\Big(\frac{1}{(n+1)^{\beta}}\Big)\le\Phi(t^{\beta}). \tag{23}$$

Пусть $1/(n+1)\le t\le 2\pi$. Тогда на основании неравенств (14), (15) для любого полинома $T_{n+1}\in B^{*}_{2n+3}$ запишем

$$K_{\beta}\left(D^{\alpha}T_{n+1},t^{\beta}\right)_2\le\|D^{\alpha}T_{n+1}\|\le(n+1)^{\alpha}\|T_{n+1}\|\le\Phi\Big(\frac{1}{(n+1)^{\beta}}\Big)\le\Phi(t^{\beta}). \tag{24}$$

Следовательно, на основании формул (23) — (24) справедливо включение $B^{*}_{2n+3}\subset\mathcal{W}^{\alpha}(K_{\beta},\Phi)$. Используя определение бернштейновского поперечника, имеем

$$q_{2n+2}(\mathcal{W}^{\alpha}(K_{\beta},\Phi);L_2)\ge q_{2n+2}(B^{*}_{2n+3},L_2)\ge$$

$$\ge b_{2n+2}(B^{*}_{2n+3},L_2)\ge\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\;\Phi\Big(\frac{1}{(n+1)^{\beta}}\Big). \tag{25}$$

Требуемые равенства (19) получаем из соотношений (20) и (25). Теорема 2 доказана.

**Следствие 1.** *Пусть $\alpha, \beta \in (0, \infty)$; $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup\left\{|c_{n+1}(f)| : f \in \mathcal{W}^{\alpha}(K_{\beta}, \Phi)\right\} = \frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\ \Phi\Big(\frac{1}{(n+1)^{\beta}}\Big).$$

## Библиографические ссылки


1. *Самко, С.Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения [Текст] / С.Г.Самко, А.А.Килбас, О.И.Маричев. — Мн. : Наука и техника, 1987. — 688 с.
2. *Butzer, P.L.* Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschitz classes [Text] / P.L. Butzer, H. Dyckhoff, E. Gorlich, R.L. Stens // Canad. J. Math. — 1977. Vol. 29, №4. — P. 781—793.
3. *Butzer, P.L.* An introduction to fractional calculus [Text] / P.L. Butzer, U. Westphal // In book: Applications of Fractional Calculus in Physics. Ed. by R.Hilfer. — Singapure, 2000. — P. 1—85.
4. *Ivanov, K.G.* On the rate of convergence of two moduli of functions [Text] / K.G. Ivanov // Pliska Stud. Math. Bulg. — 1983. — Vol. 5. — P. 97–104.
5. *Пономаренко, В.Г.* Модули гладкости дробного порядка и наилучшие приближения в $L_p$ $(1 < p < \infty)$ [Текст] / В.Г.Пономаренко // Тр. Междунар. конф. по конструктивной теории функций. Варна, 1—5 июня 1981. — София, 1983. — С. 129—133.
6. *Tikhonov, S.* On moduli of smoothness of fractional order [Text] / S. Tikhonov // Real Analysis Exchange. — 2004/2005. — Vol. 30(2). — P. 507—518.
7. *Вакарчук, С.Б.* $K$-функционалы и точные значения $n$-поперечников некоторых классов из $L_2$ [Текст] / С.Б.Вакарчук // Мат. заметки. — 1999. — Т. 66, №4. — С. 494—499.
8. *Вакарчук, С.Б.* О $K$-функционалах и точных значениях $n$-поперечников некоторых классов в пространствах $C(2\pi)$ и $L_1(2\pi)$ [Текст] / С.Б.Вакарчук // Там же. — 2002. — Т. 71, №4. — С. 522—531.
9. *Вакарчук, С.Б.* Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева — Эрмита и поперечники функциональных классов [Текст] / С.Б.Вакарчук // Там же. — 2014. — Т. 95, №5. — С. 666—684.
10. *Шабозов, М.Ш.* $K$-функционалы и точные значения $n$-поперечников некоторых классов функций в пространстве $L_2((1-x^2)^{-1/2}; [-1,1])$ [Текст] / М.Ш.Шабозов, К.Тухлиев // Изв. ТулГУ. — 2014. — №1, Ч.1. — С. 83—97.
11. *Шевчук, И.А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций [Текст] / И.А.Шевчук. — К. : Наук. думка, 1992. — 225 с.


*Надійшла до редколегії 12.04.2016*