ISSN 2312 9557. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2016, вип.* **21**

УДК 517.5

А. Є. Гайдабура*, **В. О. Кофанов****

* Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,
Дніпропетровськ, 49050. *E-mail: gaydaburaa@mail.ru*

** Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,
Дніпропетровськ, 49115. *E-mail: vladimir.kofanov@gmail.com*

Теорема еквівалентності для адитивних нерівностей типу Колмогорова

Доведено теорему еквівалентності для адитивних нерівностей на відрізку. Описано пари констант, із якими адитивні нерівності виконуються на всьому класі функцій L_s.

Ключові слова: адитивні нерівності, теорема еквівалентності.

Доказана теорема эквивалентности для аддитивных неравенств на отрезке. Описаны пары констант, с которыми аддитивные неравенства имеют место на всём классе функций L_s.

Ключевые слова: аддитивные неравенства, теорема эквивалентности.

We prove the equivalence theorem for additive inequalities on a finite interval. Besides, we describe a pair of constants so that the additive inequalities with that constants are valid on the hole class functions L_s.

Key words: additive inequalities, equivalence theorem.

Нехай G — деяка вимірна підмножина числової прямої $\mathbb{R}$. Через $L_p(G)$, $1 \le p \le \infty$, позначимо простір вимірних функцій f, таких, що $\|f\|_{L_p(G)} < \infty$, де

$$\|f\|_{L_p(G)} := \left(\int_G |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, \quad \text{якщо} \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_p(G)} := \operatorname{vrai\,sup}_{t \in G} |f(t)|, \quad \text{якщо} \quad p = \infty.$$

Як область визначення G функцій f розглянемо відрізок $I = [a, b]$ або коло T, реалізоване у вигляді відрізка $[0, 2\pi]$ з ототожненими кінцями. Якщо $f \in L_p(G)$, покладемо для скорочення $\|f\|_p := \|f\|_{L_p(G)}$.

Для $r \in \mathbb{N}$ і $s \ge 1$ через $L^r_s(G)$ позначимо простір функцій f, що мають локально абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно, причому $f^{(r)} \in L_s(G)$. Нехай далі $W^r_p(G) := \{f \in L^r_p(G) : \|f^{(r)}\|_p \le 1\}$.

Для функції $f \in L_q(G)$ покладемо

$$E_0(f)_{L_q(G)} := \inf_{c \in \mathbb{R}} \|f - c\|_{L_q(G)}.$$

Нехай $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, $\alpha \in (0,1)$. Відомо, що нерівність

$$\|x^{(k)}\|_q \le K \cdot \|x\|_p^{\alpha} \cdot \|x^{(r)}\|_s^{1-\alpha} \tag{1}$$

виконується для всіх функцій $x \in L_s^r(T)$ тоді й тільки тоді, коли на класі $L_s^r(T)$ має місце нерівність

$$E_0(x^{(k)})_q \le K_1 \cdot E_0(x)_p^{\alpha} \cdot \|x^{(r)}\|_s. \tag{2}$$

Для нерівності (2) відома теорема еквівалентності [2], що описує взаємозв'язок цієї нерівності із задачами теорії наближень.

Для функцій $x \in L_s^r[a;b]$ нерівності (1) і (2) взагалі не виконуються. Природною формою нерівностей для норм проміжних похідних функцій $x \in L_s^r[a;b]$ є адитивна форма

$$\|x^{(k)}\|_q \le A\|x\|_p + B\|x^{(r)}\|_s. \tag{3}$$

Нехай $M_{r,k}(q,p)$ – точна константа в нерівності Маркова на просторі алгебраїчних многочленів π_{r-1} степеня, не вищого за $(r-1)$, тобто

$$M_{r,k}(q,p) := \sup_{P \in \pi_{r-1}} \frac{\|P^{(k)}\|_{L_q[a,b]}}{\|P\|_{L_p[a,b]}}.$$

Відомо [1], що (3) має місце для всіх $x \in L_s^r[a;b]$ (із деяким $B = B(A)$) тоді й тільки тоді, коли $A \ge M_{r,k}(q,p)$.

Зауважимо, що у випадку, коли $q = p = s = \infty$, задачу про знаходження пар (A,B) констант, із якими на класі $L_s^r[a;b]$ виконується нерівність (3), розглянуто в працях [4; 5].

Основним результатом даного дослідження є теорема еквівалентності для адитивних нерівностей, записаних у формі нерівностей для найкращих наближень алгебраїчними многочленами. Як наслідок одержано характеризацію (в апроксимативних термінах) пар констант (A,B), із якими виконуються ці нерівності, а також необхідну умову на пари констант (A,B), із якими виконується нерівність (3). Для доведення цієї теореми еквівалентності необхідні нижченаведені допоміжні твердження.

Для функції $f \in L_q[a,b]$ і $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ покладемо

$$E_m(f)_{L_q[a,b]} := \inf_{p \in \pi_m} \|f - p\|_{L_q[a,b]}.$$

Лема 1. *Якщо для будь-якої функції $x \in L_s^r[a,b]$ має місце нерівність*

$$\|x^{(k)}\|_q \le A\|x\|_p + B\|x^{(r)}\|_s,$$

то для будь-якої функції $y \in L_s[a,b]$ виконується і нерівність

$$E_{r-k-1}(y_{r-k})_q \le AE_{r-1}(y_r)_p + B\|y\|_s, \tag{4}$$

де $y_r(t) := \frac{1}{(r-1)!}\int_a^b (t-u)_+^{r-1} \cdot y(t)du$, а $u_+ = \max\{u, 0\}$.

Доведення. Нехай $x \in L_s^r[a,b]$. Покладемо $y = x^{(r)}$, тоді $y \in L_s[a,b]$ і має місце така нерівність:

$$\|\tilde{y}_{r-k}\|_q \le A\|\tilde{y}_r\|_p + B\|y\|_s, \tag{5}$$

де $\tilde{y}_r$−довільна первісна r-го порядку від функції y.

Нехай $\tilde{y}_r := y_r - P_{r-1}(y_r)$, де $P_{r-1}(y_r)-$ алгебраїчний многочлен степеня, не вищого за $r-1$ найкращого наближення в метриці простору $L_p[a,b]$ для функції y_r. Тоді з нерівності (5) випливає нерівність (4), оскільки $\|\tilde{y}_r\|_p = E_{r-1}(y_r)_p$ $E_{r-k-1}(y_{r-k})_q \le \|\tilde{y}_{r-k}\|_q$.

Що і слід було довести.

Уведемо клас функцій $W_{p,0}^r[a;b]$:

$$W_{p,0}^r[a;b] = \{f \in W_p^r[a;b] : f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b) = 0, i = \overline{0, r-1}\}.$$

Лема 2. *Нехай $r \in \mathbb{N}$ і $p \in [1,\infty]$. Для довільної функції $y \in L_1[a,b]$ має місце рівність*

$$E_{r-1}(y_r)_p = \sup_{x \in W_{p',0}^r} \int_a^b x(t)y(t)dt.$$

Доведення. За теоремою двоїстості [4] маємо

$$E_{r-1}(y_r)_p = \sup_{\|z\|_{p'} \le 1, z \perp \pi_{r-1}} \int_a^b z(t) \cdot y_r(t)dt.$$

До інтеграла

$$\int_a^b z(t)y_r(t)dt$$

застосуємо r раз інтегрування частинами. Нагадаємо, що

$$z_j(t) := \frac{1}{(j-1)!} \int_a^b (t-u)_+^{j-1} z(u)du, \quad j = \overline{1, r}.$$

Оскільки $a - u \le 0$, коли $u \in [a,b]$, то $(a-u)_+ = 0$, а тому

$$z_j(a) = 0, \quad j = \overline{1, r}.$$

Крім того, оскільки $z \perp \pi_{r-1}$, то $z_j(b) = \frac{1}{(j-1)!} \int_a^b (b-u)^{j-1} \cdot z(u)du = 0, \quad j = \overline{1, r}$. Урахувавши це, за допомогою інтегрування частинами одержимо

$$\int_a^b z(t)y_r(t)dt = (-1)^r \int_a^b z_r(t)y(t)dt.$$

Покладемо $x = z_r$. Тоді $x \in W_{p',0}^r$ і

$$\int_a^b z(t)y_r(t)dt = (-1)^r \int_a^b x(t)y(t)dt.$$

Із урахованням центральної симетричністі класу $W^r_{p',0}$, матимемо

$$E_{r-1}(y_r)_p = \sup_{x\in W^r_{p',0}} \int_a^b x(t)y(t)dt,$$

що і слід будо довести.

Сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 1. *Нехай* $[a,b]\subset\mathbb{R}$*;* $k,r\in\mathbb{N}$*;* $k=\overline{1,r-1}$*;* $A,B>0$*;* $q,p,s\in[1;\infty]$*. Тоді нижченаведені твердження еквівалентні:*

1) для будь-якої функції $f\in L_{s'}[a,b]$

$$E_{k-1}(f_k)_{q'} \le AE_{r-1}(f_r)_{p'} + B\|f\|_{s'};$$

2) має місце нерівність

$$E(W^k_{q,0},\ \ A\cdot W^r_{p,0})_s \le B;$$

3) для будь-якої напівнорми ψ *на* L_s

$$\psi(W^k_{q,0}) \le A\cdot\psi(W^r_{p,0}) + B\cdot\psi(W^0_s),$$

де $W^0_s := \{x : \|x\|_s \le 1\}$ *– одинична куля в* $L_s[a;b]$.

Доведення. Для доведення теореми достатньо встановити правдивість ланцюжка імплікацій 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).

Покажемо, що 1) $\Rightarrow$ 2). Застосувавши теорему двоїстості [4], матимемо

$$\begin{aligned} E(W^k_{q,0},\ A\cdot W^r_{p,0})_s &= \sup_{g\in W^k_{q,0}} E(g,\ A\cdot W^r_{p,0})_s = \\ &= \sup_{g\in W^k_{q,0}} \sup_{\|f\|_{s'}\le 1} \Big\{\textstyle\int_a^b g(t)\cdot f(t)dt - \sup_{u\in A\cdot W^r_{p,0}} \int_a^b u(t)\cdot f(t)dt\Big\} = \\ &= \sup_{\|f\|_{s'}\le 1} \Big\{\textstyle\sup_{g\in W^k_{q,0}} \int_a^b g(t)\cdot f(t)dt - \sup_{u\in A\cdot W^r_{p,0}} \int_a^b u(t)\cdot f(t)dt\Big\}. \end{aligned}$$

Із урахованням леми 2, одержимо

$$E(W^k_{q,0},\ A\cdot W^r_{p,0})_s = \sup_{\|f\|_{s'}\le 1} \{E_{k-1}(f_k)_{q'} - A\cdot E_{r-1}(f_r)_{p'}\}. \tag{6}$$

За твердженням 1) теореми для $f\in W^r_{s',0}$ маємо

$$E_{k-1}(f_k)_{q'} - AE_{r-1}(f_r)_{p'} \le B\|f\|_{s'}.$$

Отже, із (6) виведемо

$$E(W^k_{q,0},\ A\cdot W^r_{p,0})_s \le \sup_{\|f\|_{s'}\le 1} B\|f\|_{s'} = B.$$

Таким чином, імплікацію 1) $\Rightarrow$ 2) доведено.

Доведемо тепер, що 2) $\Rightarrow$ 3). Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Для будь-якої функції $f \in W^k_{q,0}$ оберемо $u^\varepsilon(f) \in A\cdot W^r_{p,0}$ так, що

$$\|f - u^\varepsilon(f)\|_s \le E(W^k_{q,0},\ A\cdot W^r_{p,0})_s + \varepsilon.$$

Тоді з огляду на напівадитивність і додатну однорідність функціонала ψ одержимо

$$\psi(f) = \psi(f - u^\varepsilon(f) + u^\varepsilon(f)) \le\ \psi(f - u^\varepsilon(f)) + \psi(u^\varepsilon(f)) \le \psi(W^0_s)\cdot\|f - u^\varepsilon(f)\|_s + A\cdot\psi(W^r_{p,0}).$$

Отже,

$$\psi(W^k_{q,0}) \le A\psi(W^r_{p,0}) + (E(W^k_{q,0},\ AW^r_{p,0})_s + \varepsilon)\psi(W^0_s).$$

Звідси, зважаючи на твердження 2) і довільність ε, одержимо твердження 3).

Таким чином, імплікацію 2) $\Rightarrow$ 3) доведено.

Для доведення теореми залишилося встановити правдивість імплікації 3) $\Rightarrow$ 1). Зафіксуємо $f \in L_{s'}[a,b]$ і розглянемо напівнорму

$$\psi(y) := \Big|\int_a^b f(t)\cdot y(t)dt\Big|.$$

За лемою 2 для $k \in \mathbb{N}$ і $q \in [1;\infty]$ маємо

$$\psi(W^k_{q,0}) = \sup_{y\in W^k_{q,0}}\Big|\int_a^b f(t)y(t)dt\Big| = E_{k-1}(f_k)_{q'}. \tag{7}$$

Крім того,

$$\psi(W^0_s) = \sup_{\|y\|_s\le 1}\Big|\int_a^b f(t)\cdot y(t)dt\Big| = \|f\|_{s'}. \tag{8}$$

Із рівностей (7) і (8) випливає імплікація 3) $\Rightarrow$ 1). Теорему доведено.

Наслідок 1. *Нехай $A \ge 0$. Для будь-якої функції $y \in L_s[a,b]$ нерівність*

$$E_{r-k-1}(y_{r-k})_q \le AE_{r-1}(y_r)_p + B\|y\|_s$$

має місце тоді й тільки тоді, коли

$$B \ge B(A) := E(W^{r-k}_{q',0},\ A\cdot W^r_{p',0})_{s'}.$$

Як було зазначено раніше, необхідну умову на константу A в нерівності (3) одержано в праці [1]. Ураховуючи цей результат, із наслідку 1 і леми 1 одержуємо необхідну умову на пари констант (A,B) у цій нерівності.

Наслідок 2. *Якщо нерівність*

$$\|x^{(k)}\|_q \le A\|x\|_p + B\|x^{(r)}\|_s$$

має місце для всіх $x \in L_s^r[a,b]$*, то:*

1) $A \ge M_{r,k}(q,p)$*;*

2) $B \ge E(W_{q',0}^{r-k},\ A \cdot W_{p',0}^{r})_{s'}$.

Бібліографічні посилання

1. *Бабенко, В. Ф.* Об аддитивных неравенствах для промежуточных производных функций, определенных на конечном интервале [текст]/ В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов// Укр. мат. журн. – 1997. – 49, №5. – С. 619 – 678.
2. *Н*еравенства для производных и их приложения [текст]/ В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов.– К.: Наук. думка, 2003. – 590 с.
3. *Буренков, В. И.* О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале [текст]/ В. И. Буренков // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1980. – 156. – С. 22 – 29.
4. *Корнейчук, Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения [текст]/ Н. П. Корнейчук.– М.: Наука, 1976. – 320 с.
5. *Шадрин, А. Ю.* О точных постоянных в неравенствах между нормами производных на конечном отрезке [текст]/ А. Ю. Шадрин // Докл. РАН. – 1992. – 326, №1. – С. 50 – 53.

Надійшла до редколегії 28.04.2016