УДК 517.5

С. В. Гончаров
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,
Днепропетровск, 49050. *E-mail: sergon.public@gmail.com*

О продолжении функций, интегрируемых с весом на отрезке и удовлетворяющих условиям типа Липшица

Приведён способ продолжения интегрируемых с весом на отрезке функций, удовлетворяющих условиям типа интегрального условия Липшица, на всю прямую. Доказано, что при этом разностные свойства функций сохраняются.

Ключевые слова: интегральная метрика, условие Липшица, функция веса, продолжение

Наведено спосiб продовження iнтегровних iз вагою на вiдрiзку функцiй, що задовольняють умови типу iнтегральної умови Лiпшица, на всю пряму. Доведено, що при цьому рiзницевi властивостi функцiй зберiгаються.

Ключовi слова: iнтегральна метрика, умова Лiпшица, функцiя ваги, продовження

We show the method to expand functions being integrable with a weight on the interval, and satisfying conditions of integral Lipschitz type, on the whole line. We prove that the differential properties of such functions are kept at the expansion.

Key words: integral metric, Lipschitz condition, weight function, expansion

Пусть $\alpha \in (-1;+\infty)$, $\beta \in (-1;+\infty)$; $p \in [1;+\infty)$; $\nu \in (0;1]$.

Вес $W\colon [-1;+1] \to \mathbb{R}$: $W(t) = B(t)(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$, где измеримая функция $B(t)$ такова, что $0 < C_1 \leqslant B(t) \leqslant C_2$.

Обозначим $W^*\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — «зеркально-периодическое» продолжение веса $W(\cdot)$ с $[-1;1]$ на $\mathbb{R}$, т.е. $W^*(x) = W(x)$ при $x \in [-1;1]$ и $W^*(-1-t) = W^*(-1+t)$, $W^*(1+t) = W^*(1-t)$. Далее считаем W уже продолженным до W^*, $W = W^*$.

$L^p_W[a;b]$ — пространство функций $F\colon [a;b]\to\mathbb{R}$: $\|F\|_{L^p_W[a;b]} = \Big(\int\limits_a^b |F(x)|^p W(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

Функциональные классы

$K\mathcal{L}^p_W[a;b] = \big\{F \in L^p_W[a;b]\colon \|F\|_{L^p_W[a;b]} \leqslant K\big\}$, $M\mathcal{H}^{(\nu)}_{p;W}[a;b] = \big\{F\in L^p_W[a;b]\colon \forall h\in(0;1)$

$$\Psi^{\pm}(F;a;b;h) = \Big(\int\limits_{a+\frac{h}{2}}^{b-\frac{h}{2}} |F(x+\tfrac{h}{2}) - F(x-\tfrac{h}{2})|^p W(x \pm \tfrac{h}{2})dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant Mh^{\nu}\big\}.$$

Теорема 1. *Пусть $F \in \mathcal{L}^p_W[-1;1] \cap \mathcal{H}^{(\nu)}_{p;W}[-1;1]$ и $\nu p > \max\{-\alpha;-\beta\}$.*

Тогда существуют константы $K^* = K^*_{\alpha;\beta;p;\nu}$, $M^* = M^*_{\alpha;\beta;p;\nu}$ и функция $F^*\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что $F^*(x) = F(x)$ при $x \in [-1;1]$ и $F^* \in K^*\mathcal{L}^p_W(\mathbb{R}) \cap M^*\mathcal{H}^{(\nu)}_{p;W}(\mathbb{R})$.

$K\mathcal{L}_W^p(\mathbb{R})$ и $M\mathcal{H}_{p;W}^{(\nu)}(\mathbb{R})$ — это $K\mathcal{L}_W^p[a;b]$ и $M\mathcal{H}_{p;W}^{(\nu)}[a;b]$ при $a=-\infty$, $b=+\infty$.

Доказательство в основном воспроизводит [2], где этот результат получен для $W(t)\equiv 1$ ($\alpha=\beta=0$, $B(t)\equiv 1$). Символами C', C_1, C_1'' и т.д. обозначим константы, возможно, зависящие от некоторых из параметров α, β, p, ν.

Доказательство. I. Вначале продолжим $F(\cdot)$ с $[-1;1]$ до $F_1(\cdot)$ на $[-1;3]$ так, что $\|F_1\|_{L_W^p[-1;3]}\leqslant K_1$ и $\forall h\in(0;h_0)$: $\Psi^{\pm}(F_1;-1;3;h)\leqslant M_1h^{\nu}$, где K_1 и M_1 — константы, а $h_0\in(0;1)$ — достаточно малая абсолютная константа.

Заменив $x=1-t$, перейдём к весу $w(t)=W(1-t)$ ($w(t)=b(t)t^{\alpha}(2-t)^{\beta}$ при $t\in(0;2)$ и $w(t)=w(-t)$), функции $f(t)=F(1-t)$ и величинам

$$\|g\|_{L_w^p[a;b]}=\Big(\int\limits_a^b|g(t)|^pw(t)dt\Big)^{\frac1p},\ \psi^{\pm}(g;a;b;h)=\Big(\int\limits_{a+\frac h2}^{b-\frac h2}|g(t+\tfrac h2)-g(t-\tfrac h2)|^pw(t\pm\tfrac h2)dt\Big)^{\frac1p},$$

определяющим классы $K\mathcal{L}_w^p[a;b]$ и $M\mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[a;b]$. Тогда $f\in\mathcal{L}_w^p[0;2]\cap\mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[0;2]$.

Положим $f_1(t)=f(|t|)$, $t\in[-2;2]$. Очевидно, $\|f_1\|^p_{L_w^p[-2;2]}=2\|f\|^p_{L_w^p[0;2]}\leqslant 2$, поэтому $f_1\in K_1\mathcal{L}_w^p[-2;2]$. Возьмём $\forall h\in(0;h_0)$ и оценим $\psi^+(f_1;-2;2;h)=$

$$=\Big(\int\limits_{-2+h}^{2}|f_1(t)-f_1(t-h)|^pw(t)dt\Big)^{\frac1p}\leqslant$$

$$\leqslant 3^{\frac1p}\Big(\Big(\int\limits_{-2+h}^{0}(...)\Big)^{\frac1p}+\Big(\int\limits_0^h(...)\Big)^{\frac1p}+\Big(\int\limits_h^2(...)\Big)^{\frac1p}\Big)=3^{\frac1p}\big(\mu_1^++\mu_2^++\mu_3^+\big),$$

$$\psi^-(f_1;-2;2;h)=\Big(\int\limits_{-2}^{2-h}|f_1(t+h)-f_1(t)|^pw(t)dt\Big)^{\frac1p}\leqslant$$

$$\leqslant ...3^{\frac1p}\Big(\Big(\int\limits_{-2}^{-h}(...)\Big)^{\frac1p}+\Big(\int\limits_{-h}^{0}(...)\Big)^{\frac1p}+\Big(\int\limits_0^{2-h}(...)\Big)^{\frac1p}\Big)=3^{\frac1p}\big(\mu_1^-+\mu_2^-+\mu_3^-\big).$$

Заметим, что $\mu_3^+=\psi^+(f;0;2;h)\leqslant h^{\nu}$ и $\mu_3^-=\psi^-(f;0;2;h)\leqslant h^{\nu}$. Кроме того,

$$\mu_1^+=\Big(\int\limits_{-2+h}^{0}|f_1(t)-f_1(t-h)|^pw(t)dt\Big)^{\frac1p}\stackrel{t=-u}{=}\Big(\int\limits_0^{2-h}|f(u+h)-f(u)|^pw(u)du\Big)^{\frac1p}=$$

$=\psi^-(f;0;2;h)\leqslant h^{\nu}$; аналогично $\mu_1^-=\Big(\int\limits_h^2|f(u)-f(u-h)|^pw(u)du\Big)^{\frac1p}=\psi^+(f;0;2;h)\leqslant h^{\nu}$.

Перейдём к оценке μ_2^+ и μ_2^-. Поскольку $\mu_2^+=\mu_2^-$ (из замены $t=-u$), достаточно оценить $\mu_2=\Big(\int\limits_0^h|f_1(t)-f_1(t-h)|^pw(t)dt\Big)^{\frac1p}=\Big(\int\limits_0^h|f(t)-f(h-t)|^pw(t)dt\Big)^{\frac1p}$.

Применим приём В. К. Дзядыка. Для $\forall t\in[0;h]$:

$$\int\limits_{2h}^{4h}|f(t)-f(h-t+u)|^pdu\leqslant\int\limits_{2t}^{4h+2t}|f(t)-f(h-t+u)|^pdu\stackrel{u=v+2t}{=}\int\limits_0^{4h}|f(t)-f(h+t+v)|^pdv,$$

откуда по теореме Фубини $\int\limits_{2h}^{4h}\Big(\int\limits_0^h|f(t)-f(h-t+u)|^pw(t)dt\Big)du=$

$$=\int\limits_0^h\Big(\int\limits_{2h}^{4h}|f(t)-f(h-t+u)|^pdu\Big)w(t)dt\leqslant\int\limits_0^h\Big(\int\limits_0^{4h}|f(t)-f(h+t+v)|^pdv\Big)w(t)dt\stackrel{v=2u-4h}{=}$$

$$=\int\limits_0^h\Big(2\int\limits_{2h}^{4h}|f(t)-f(t+2(u-\tfrac32h))|^pdu\Big)w(t)dt=\int\limits_{2h}^{4h}\Big(2\int\limits_0^h|f(t)-f(t+2(u-\tfrac32h))|^pw(t)dt\Big)du.$$

Поэтому $\int\limits_{2h}^{4h}\Big[\int\limits_0^h |f(t)-f(h-t+u)|^p w(t)dt - 2\int\limits_0^h |f(t)-f(t+2(u-\frac{3}{2}h))|^p w(t)dt\Big]du \leqslant 0$, и $\exists v_0 \in [2h;4h]$: $\int\limits_0^h |f(t)-f(h-t+v_0)|^p w(t)dt \leqslant 2\int\limits_0^h |f(t)-f(t+2(v_0-\frac{3}{2}h))|^p w(t)dt$, причём $\tilde{h} = 2(v_0 - \frac{3}{2}h) \in [h;5h]$. Тогда по неравенству Минковского

$\mu_2 \leqslant \big(\int\limits_0^h |f(t)-f(h-t+v_0)|^p w(t)dt\big)^{\frac{1}{p}} + \big(\int\limits_0^h |f(h-t+v_0)-f(h-t)|^p w(t)dt\big)^{\frac{1}{p}} = \mu_{2;1}+\mu_{2;2}$,

где $\mu_{2;1} \leqslant \big(2\int\limits_0^h |f(t+\tilde{h})-f(t)|^p w(t)dt\big)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2^{\frac{1}{p}}\psi^-(f;0;2;\tilde{h}) \leqslant C_1 h^\nu$.

Заменив $h-t=u$, рассмотрим $\mu_{2;2} = \big(\int\limits_0^h |f(u+v_0)-f(u)|^p w(h-u)du\big)^{\frac{1}{p}}$:

а) если $\alpha \geqslant 0$, то $w(h-u) = \frac{w(h-u)}{w(v_0+u)}w(v_0+u) \leqslant C_2\big(\frac{h-u}{v_0+u}\big)^\alpha w(v_0+u) = C_2(\frac{v_0+h}{v_0+u}-1)^\alpha w(v_0+u) \leqslant C_2(\frac{v_0+h}{v_0}-1)^\alpha w(v_0+u) \leqslant C_3 w(v_0+u)$. Значит,

$$\mu_{2;2} \leqslant C_4\big(\int\limits_0^h |f(u+v_0)-f(u)|^p w(v_o+u)du\big)^{\frac{1}{p}} \overset{v_0+u=s}{=}$$

$$= C_4\big(\int\limits_{v_0}^{v_0+h} |f(s)-f(s-v_0)|^p w(s)ds\big)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_4\psi^+(f;0;2;v_0) \leqslant C_5 h^\nu;$$

б) если $\alpha < 0$, то условие $\nu p > -\alpha$ позволяет применить рассуждения из доказательства теоремы 3 в [1]. При $\nu p > 1$ возьмём $\forall q > \frac{p}{1+\alpha}$, а при $\nu p \leqslant 1$ можем выбрать $q \in \big(\frac{p}{1+\alpha};\frac{p}{1-\nu p}\big)$. Тогда $\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 0$ и по неравенству Гёльдера для $r = \frac{q}{p}$:

$$\mu_{2;2} \leqslant \big(\int\limits_0^h |f(u+v_0)-f(u)|^q du\big)^{\frac{1}{q}}\big(\int\limits_0^h w^{\frac{q}{q-p}}(h-u)du\big)^{\frac{q-p}{pq}} = H'_{1;1}\cdot H'_{1;2},$$

где $H'_{1;2} \leqslant C'_5 h^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})(1+\frac{\alpha q}{q-p})} = C'_5 h^{\frac{\alpha}{p}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$, а $H'_{1;1} \leqslant C''_5 h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{p}}$ (можем оценить эту величину аналогично $H_{1;1}$ в теореме 3, ибо $f \in \mathcal{H}^{(\nu)}_{p;w}[0;2] \subseteq M'\overline{\mathcal{H}}^{(\nu)}_{p;w}[0;2]$).

В любом случае $\mu_{2;2} \leqslant C_6 h^\nu$. Значит, $\mu_2 \leqslant C_7 h^\nu$, откуда $\psi^+(f_1;-2;2;h) \leqslant C_8 h^\nu$ и $\psi^-(f_1;-2;2;h) \leqslant C_8 h^\nu$, т.е. $f_1 \in M_1\mathcal{H}^{(\nu)}_{p;w}[-2;2]$. Тогда и функция $F_1(x) = f_1(1-x) \in K_1\mathcal{L}^p_W[-1;3] \cap M_1\mathcal{H}^{(\nu)}_{p;W}[-1;3]$.

II. Теперь построим функцию $F_2\colon [-1;+\infty) \to \mathbb{R}$: $F_2(x) = F(x)$ при $x \in [-1;1]$, $\|F_2\|_{L^p_W[-1;+\infty)} \leqslant K_2$ и $\forall h \in (0;h_0)$ $\Psi^\pm(F_2;-1;+\infty;h) \leqslant M_2 h^\nu$.

Для этого вновь перейдём к переменной $t = 1-x$ и рассмотрим функцию

$$f_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty;-1], \\ \lambda(t)f_1(t), & t \in [-1;2], \end{cases} \quad \text{где } \lambda(t) = \begin{cases} 1+t, & t \in [-1;0], \\ 1, & t \in [0;2]. \end{cases}$$

$\|f_2\|^p_{L^p_w(-\infty;2]} = \int\limits_0^1 (1-z)^p|f(z)|^p w(z)dz + \|f\|^p_{L^p_w[0;2]} \leqslant 2\|f\|^p_{L^p_w[0;2]} \leqslant 2 \Rightarrow f_2 \in K_2\mathcal{L}^p_w(-\infty;2]$.

$\forall h \in (0;h_0)$ оценим $\psi^+(f_2;-\infty;2;h) = \big(\int\limits_{-\infty}^2 |f_2(t)-f_2(t-h)|^p w(t)dt\big)^{\frac{1}{p}} \leqslant$

$$\leqslant 4^{\frac{1}{p}}\Big[\Big(\int\limits_{-1}^{-1+h}(\ldots)\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\int\limits_{-1+h}^{0}(\ldots)\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\int\limits_{0}^{h}(\ldots)\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\int\limits_{h}^{2}(\ldots)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]=4^{\frac{1}{p}}\big(\varphi_1^{+}+\varphi_2^{+}+\varphi_3^{+}+\varphi_4^{+}\big).$$

1) $\varphi_1^{+}=\Big(\int\limits_{-1}^{-1+h}|(1+t)f_1(t)|^p w(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant h\Big(\int\limits_{-1}^{-1+h}|f_1(t)|^p w(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant hK_1\leqslant K_1h^{\nu};$

2) $\varphi_2^{+}=\Big(\int\limits_{-1+h}^{0}|(1+t)f_1(t)-(1+t-h)f_1(t-h)|^p w(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}$. По неравенству Минковского $\varphi_2^{+}\leqslant\Big(\int\limits_{-1+h}^{0}|hf_1(t-h)|^p w(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}+\Bigg(\int\limits_{-1+h}^{0}|(1+t)\big(f_1(t)-f_1(t-h)\big)|^p w(t)dt\Bigg)^{\frac{1}{p}}\leqslant$

$$\leqslant h\Big(\int\limits_{-1+h}^{0}|f_1(t-h)|^p w(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}+\psi^{+}(f_1;-2;2;h)=h\varphi_{2;1}^{+}+\psi^{+}(f_1;-2;2;h)\leqslant h\varphi_{2;1}^{+}+M_1h^{\nu}.$$

$$\varphi_{2;1}^{+}\leqslant\Big(\int\limits_{-1+h}^{0}|f_1(t)-f_1(t-h)|^p w(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\int\limits_{-1+h}^{0}|f_1(t)|^p w(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$\leqslant\psi^{+}(f_1;-2;2;h)+\|f_1\|_{L^p_w[-2;2]}\leqslant M_1h^{\nu}+K_1\leqslant C_9$, так что $\varphi_2^{+}\leqslant C_9h+M_1h^{\nu}\leqslant C_{10}h^{\nu};$

3) $\varphi_3^{+}=\Big(\int\limits_{0}^{h}|f_1(t)-(1+t-h)f_1(t-h)|^p w(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant$

$$\leqslant\Big(\int\limits_{0}^{h}|f_1(t)-f_1(t-h)|^p w(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\int\limits_{0}^{h}|(t-h)f_1(t-h)|^p w(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$\leqslant\psi^{+}(f_1;-2;2;h)+h\Big(\int\limits_{0}^{h}|f_1(t-h)|^p w(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}$. Далее аналогично φ_2^{+}: $\varphi_3^{+}\leqslant C_{11}h^{\nu};$

4) $\varphi_4^{+}=\Big(\int\limits_{h}^{2}|f_1(t)-f_1(t-h)|^p w(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant\psi^{+}(f_1;-2;2;h)\leqslant M_1h^{\nu}.$

Из 1)–4) вытекает, что $\psi^{+}(f_2;-\infty;2;h)\leqslant C_{12}h^{\nu}$.

Для оценки $\psi^{-}(f_2;-\infty;2;h)$ аналогично применим неравенство треугольника:

$$\|f_1(t+h)\|_{L^p_w[c;d]}\leqslant\|f_1(t+h)-f_1(t)\|_{L^p_w[c;d]}+\|f_1(t)\|_{L^p_w[c;d]}\leqslant M_1h^{\nu}+K_1.$$

Итак, $\psi^{-}(f_2;-\infty;2;h)\leqslant C_{13}h^{\nu}$, поэтому $f_2\in M_2\mathcal{H}^{(\nu)}_{p;w}(-\infty;2]$.

Тогда и функция $F_2(x)=f_2(1-x)\in K_2\mathcal{L}^p_W[-1;+\infty)\cap M_2\mathcal{H}^{(\nu)}_{p;W}[-1;+\infty)$.

III. Аналогично I–II продолжаем $F_2(\cdot)$ с $[-1;+\infty)$ до $F_3(\cdot)$ на $(-\infty;+\infty)$ (можно взять $\hat{F}_2(x)=F_2(-x)$ и вес $\hat{W}(x)=W(-x)$, при этом в рассуждениях из I–II меняются местами α и β) так, что $F_3(x)=F_2(x)=F(x)$ при $x\in[-1;1]$, $\|F_3\|_{L^p_W(\mathbb{R})}\leqslant K_3$ и $\forall h\in(0;h_0)$ $\Psi^{\pm}(F_3;-\infty;+\infty;h)\leqslant M_3h^{\nu}$.

Построенная функция $F_3(\cdot)$ является искомой $F^*(\cdot)$.

Библиографические ссылки

1. *Гончаров, С. В.* О вложении классов функций, интегрируемых с весом на отрезке и удовлетворяющих условиям типа Липшица [Текст] / С.В. Гончаров // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Математика. — 2014. — Вип. 19. — С. 24–35.
2. *Дзядык, В. К.* О продолжении функций, удовлетворяющих условию Липшица в метрике L_p [Текст] / В.К. Дзядык // Мат. сб. — 1956. — Т. 40 (82), № 2. — С. 239–242.

Надійшла до редколегії 28.04.2016