УДК 517.5

В. А. Кофанов

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,
Днепропетровск, 49115. E-mail: vladimir.kofanov@gmail.com

О точных неравенствах разных метрик типа Ремеза для периодических функций

Доказаны новые точные неравенства разных метрик типа Ремеза для периодических функций, полиномов и сплайнов.

Ключевые слова: неравенства типа Ремеза, теорема сравнения, перестановки.

Доведено нові точні нерівності різних метрик типу Ремеза для періодичних функцій, поліномів і сплайнів.

Ключові слова: нерівності типу Ремеза, теорема порівняння, перестановки.

It is proved the new sharp Remez-type inequalities of various metrics for periodic functions, polynomials and splines.

Key words: Remez-type inequalities, the comparison theorem, rearrangements.

Пусть G — измеримое подмножество числовой оси $\mathbf{R}$, а $L_p(G)$ — пространство измеримых функций $x : G \rightarrow \mathbf{R}$, таких, что $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\|f\|_{L_p(G)} := \left(\int_G |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad \text{если } 0 < p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_p(G)} := \operatorname{vrai} \sup_{t \in G} |f(t)|, \quad \text{если } p = \infty.$$

Через I_d обозначим окружность, реализованную в виде отрезка $[0, d]$ с отождествленными концами. Вместо $\|x\|_{L_p(I_{2\pi})}$ будем писать для краткости $\|x\|_p$. Для $r \in \mathbf{N}$, $G = \mathbf{R}$ или $G = I_d$, через $L_\infty^r(G)$ обозначим пространство всех функций $x \in L_\infty(G)$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$ -го порядка и таких, что $x^{(r)} \in L_\infty(G)$.

Будем говорить, что $f \in L_\infty^1(\mathbf{R})$ является функцией сравнения для $x \in L_\infty^1(\mathbf{R})$, если $\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \leq \|f\|_{L_\infty(\mathbf{R})}$, и из равенства $x(\xi) = f(\eta)$, где $\xi, \eta \in \mathbf{R}$, вытекает неравенство $|x'(\xi)| \leq |f'(\eta)|$, если указанные производные существуют. Нечетную 2ω -периодическую функцию $\varphi \in L_\infty^1(I_{2\omega})$ будем называть S -функцией, если она обладает такими свойствами: φ — четная относительно $\omega/2$, $|\varphi|$ — выпуклая вверх на $[0, \omega]$ и строго монотонная на $[0, \omega/2]$. Для 2ω -периодической S -функции φ через $S_\varphi(\omega)$ обозначим класс функций x из пространства $L_\infty^1(I_d)$, для которых φ является функцией сравнения. Отметим, что классы $S_\varphi(\omega)$ рассматривались в работах [1; 2]. Примерами классов $S_\varphi(\omega)$ являются соболевские классы $\{x \in L_\infty^r(I_d) : \|x\|_\infty \leq A_0, \quad \|x^{(r)}\|_\infty \leq A_r\}$, а также ограниченные

подмножества пространства T_n (тригонометрических полиномов порядка не выше n) и пространства $S_{n,r}$ (2π -периодических сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n, k \in \mathbf{Z}$).

В теории приближения важную роль играют неравенства типа Ремеза

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})} \leq C(n, \beta) \|T\|_{L_\infty(I_{2\pi} \setminus B)} \quad (1)$$

на классе T_n , где B — произвольное измеримое по Лебегу множество $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta$. Начало этой тематике положила работа [3] Е. Ремеза, в которой он нашел точную константу в неравенстве вида (1) для алгебраических многочленов. В неравенстве Ремеза экстремальным является многочлен Чебышева 1-го рода. Точная константа в неравенстве (1) для тригонометрических полиномов неизвестна. В ряде работ получены двухсторонние оценки для точных констант $C(n, \beta)$. Кроме того, известно асимптотическое поведение констант $C(n, \beta)$ при $\beta \rightarrow 2\pi$ [4] и $\beta \rightarrow 0$ [5]. Библиографию работ по данной тематике можно найти в [4–6]. В работе [5] доказано неравенство

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})} \leq \left(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{n\beta}{4m}\right) \|T\|_{L_\infty(I_{2\pi} \setminus B)} \quad (2)$$

для произвольного полинома $T \in T_n$, имеющего минимальный период $2\pi/m$, и любого измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta$, где $\beta \in (0, 2\pi m/n)$. Равенство в (2) достигается для полинома $T(t) = \cos nx + \frac{1}{2}(1 - \cos \beta/2)$. Этот результат был обобщен в [7], где для любой d -периодической функции $x \in S_\varphi(\omega)$ (φ — заданная функция сравнения) и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset I_d$, $\mu B \leq \beta$, доказано неравенство

$$\|x\|_\infty \leq \frac{3\|\varphi\|_\infty - \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)}{\|\varphi\|_\infty + \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)} \|x\|_{L_\infty(I_d \setminus B)},$$

которое является точным на классе $S_\varphi(\omega)$ и обращается в равенство для функции $x(t) = \varphi(t) + \frac{1}{2}(\|\varphi\|_\infty - \varphi(\frac{\omega-\beta}{2}))$.

Для $x \in L_p(I_d)$ положим [8]

$$L(x)_p := \sup \left\{ \|x\|_{L_p[a,b]} : [a, b] \subset I_d, |x(t)| > 0, t \in (a, b) \right\}. \quad (3)$$

Отметим, что $L(x)_\infty = \|x\|_\infty$.

Пусть $f \in L_1[a, b]$. Через $r(f, t)$, $t \in [0, b - a]$, обозначим перестановку функции $|f|$ (см., напр., [9, с.17]) и положим $r(f, t) = 0$ для $t > b - a$.

В данной статье получены точные неравенства разных метрик типа Ремеза для функций $x \in L_p(I_d)$, удовлетворяющих условию $L(x)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}} \|x\|_{L_p(I_d)}$. Это условие, в частности, выполнено для функций $x \in L_p(I_d)$, удовлетворяющих одному из требований $\|x_+\|_{L_p(I_d)} = \|x_-\|_{L_p(I_d)}$ или $L(x_+)_p = L(x_-)_p$.

Теорема 1. Пусть $p > 0$, φ — S -функция с периодом 2ω , $\beta \in (0, 2\omega)$. Если d -периодическая функция $x \in S_\varphi(\omega)$ такова, что

$$\|x\|_{L_p(I_d)} = \|\varphi\|_{L_p(I_{2\omega})} \quad (4)$$

и удовлетворяет условию

$$L(x)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}} \|x\|_{L_p(I_d)}, \quad (5)$$

то для любого $q \geq p$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset I_d$, $\mu B \leq \beta$, имеет место неравенство

$$L(x)_q \leq L(\varphi)_q \frac{\|x\|_{L_p(I_d \setminus B)}}{\|\varphi\|_{L_p(I_{2\omega} \setminus B_1)}}, \quad (6)$$

где $B_1 := \left[\frac{-\omega-\beta/2}{2}, \frac{-\omega+\beta/2}{2} \right] \cup \left[\frac{\omega-\beta/2}{2}, \frac{\omega+\beta/2}{2} \right]$.

Неравенство (6) является точным и обращается в равенство для функции $x(t) = \varphi(t)$ и множества $B = B_1$.

Доказательство. Зафиксируем функцию $x \in S_\varphi(\omega)$, удовлетворяющую условиям теоремы 1. Так как $L(\varphi)_p = 2^{-\frac{1}{p}} \|\varphi\|_{L_p(I_d)}$, то из (4) и (5) следует, что

$$L(x)_p \leq L(\varphi)_p. \quad (7)$$

Пусть $[a, b]$ — отрезок, реализующий $\sup$ в определении (3) величины $L(\varphi)_q$. Ввиду непрерывности функции x выполнено равенство $x(a) = x(b) = 0$. Поэтому для любого $y \in (0, \|x\|_\infty)$ существуют точки

$$t_i \in [a, b], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad m \geq 2, \quad y_j \in [0, \omega], \quad j = 1, 2,$$

такие, что

$$y = |x(t_i)| = |\varphi(y_j)|.$$

Так как φ является функцией сравнения для x , то

$$|x'(t_i)| \leq |\varphi'(y_j)|.$$

Пусть $\bar{x}$ — сужение функции $|x|$ на $[a, b]$, а $\bar{\varphi}$ — сужение $|\varphi|$ на $[0, \omega]$. Покажем, что если точки $\theta_1 \in [0, b-a]$ и $\theta_2 \in [0, \omega]$ выбраны так, что

$$y = r(\bar{x}, \theta_1) = r(\bar{\varphi}, \theta_2),$$

то

$$|r'(\bar{x}, \theta_1)| \leq |r'(\bar{\varphi}, \theta_2)|.$$

Действительно, это сразу следует из теоремы о производной перестановки (см., напр., [9, с. 19]), в силу которой

$$|r'(\bar{x}, \theta_1)| = \left[\sum_{i=1}^m |x'(t_i)|^{-1} \right]^{-1} \leq \left[\sum_{j=1}^2 |\varphi'(y_j)|^{-1} \right]^{-1} = |r'(\bar{\varphi}, \theta_2)|.$$

Учитывая также неравенство $r(\bar{x}, 0) \leq \|x\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty = r(\bar{\varphi}, 0)$, вытекающее из определения функции сравнения и того факта, что перестановка сохраняет равномерную норму, заключаем, что разность $\Delta(t) := r(\bar{x}, t) - r(\bar{\varphi}, t)$ меняет знак на $[0, \infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). То же самое верно и для разности $\Delta_p(t) := r^p(\bar{x}, t) - r^p(\bar{\varphi}, t)$. Покажем, что

$$\int_0^\xi r^p(\bar{x}, t) dt \leq \int_0^\xi r^p(\bar{\varphi}, t) dt, \quad \xi > 0. \quad (8)$$

Положим $I(\xi) := \int_0^\xi \Delta_p(t) dt$ и $M = \max\{b - a, \omega\}$. Тогда $I(0) = 0$ и $I(M) \leq 0$ в силу (7). Кроме того, $I'(\xi) = \Delta_p(\xi)$ меняет знак (с минуса на плюс) не более одного раза. Следовательно, $I(\xi) \leq 0$, $\xi > 0$, что равносильно (8). Из (8) в силу теоремы Харди–Литлвуда–Полиа (см., напр., [9, с. 19]) следует неравенство

$$L(x)_q \leq L(\varphi)_q. \quad (9)$$

В то же время для любого измеримого множества $B \subset I_d$, $\mu B \leq \beta$, имеет место неравенство $\int_B |x(t)|^p dt \leq \int_0^\beta r^p(x, t) dt$, а так как перестановка сохраняет L_p -норму функции, то

$$\|x\|_{L_p(I_d \setminus B)}^p = \int_{I_d} |x(t)|^p dt - \int_B |x(t)|^p dt \geq \int_0^d r^p(x, t) dt - \int_0^\beta r^p(x, t) dt. \quad (10)$$

Заметим далее, что из условий (4) и (5) вытекает (см. доказательство теоремы 2 в [10]) аналогичное (8) неравенство

$$\int_0^\xi r^p(x, t) dt \leq \int_0^\xi r^p(\varphi, t) dt, \quad \xi > 0.$$

Применяя это неравенство и равенство (4), из (10) получаем

$$\|x\|_{L_p(I_d \setminus B)}^p \geq \int_0^{2\omega} r^p(\varphi, t) dt - \int_0^\beta r^p(\varphi, t) dt = \int_\beta^{2\omega} r^p(\varphi(\cdot), t) dt = \int_{I_{2\omega} \setminus B_1} |\varphi(t)|^p dt.$$

Из этой оценки и неравенства (9) следует (6). Теорема 1 доказана.

Символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbf{N}$, обозначим сдвиг r -го 2π -периодического интеграла с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$, удовлетворяющий условию $\varphi_r(0) = 0$. Положим $\varphi_{\lambda,r}(t) = \lambda^{-r} \varphi_r(t)$. Ясно, что сплайн $\varphi_{\lambda,r}(t)$ является S -функцией.

Теорема 2. Пусть $r \in \mathbf{N}$, $q > p > 0$, $\beta \in (0, 2\pi)$. Тогда для любой функции $x \in L_\infty^r(I_{2\pi})$, для которой выполнено условие

$$L(x)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}} \|x\|_p,$$

и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta/\lambda$, где λ выбрано из условия $\|x\|_p = \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p(I_{2\pi/\lambda})}$, имеет место неравенство

$$L(x)_q \leq L(\varphi_r)_q \left(\frac{\|x\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)}}{\|\varphi_r\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B_1)}} \right)^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \quad (11)$$

где $\alpha = \frac{r+1/q}{r+1/p}$, а $B_1 := \left[\frac{-\pi-\beta/2}{2}, \frac{-\pi+\beta/2}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi-\beta/2}{2}, \frac{\pi+\beta/2}{2} \right]$.

Неравенство (11) является точным и обращается в равенство для функции $x(t) = \varphi_r(t)$ и множества $B = B_1$.

Доказательство. Ввиду однородности (11) можно считать, что

$$\|x^{(r)}\|_\infty = 1. \quad (12)$$

Заметим, что при $\beta = 0$ неравенство (11) было доказано в [10]. Из этого неравенства ввиду (12) следует, что если λ выбрать из условия $\|x\|_p = \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p(I_{2\pi/\lambda})}$, то $L(x)_q \leq L(\varphi_{\lambda,r})_q$. Из последнего неравенства (при $q = \infty$) в силу теоремы сравнения Колмогорова следует, что сплайн $\varphi(t) = \varphi_{\lambda,r}(t)$ является функцией сравнения для функции x , т. е. $x \in S_\varphi(\frac{\pi}{\lambda})$. Теперь теорема 2 вытекает из теоремы 1.

Из теоремы 1 аналогично выводятся неравенства разных метрик типа Ремеза для тригонометрических полиномов и сплайнов.

Теорема 3. Пусть $n, m \in \mathbf{N}$, $m \leq n$, $q > p > 0$, $\beta \in (0, 2\pi m/n)$, а тригонометрический полином $T \in T_n$ порядка не выше n имеет минимальный период $2\pi/m$ и удовлетворяет условию

$$L(T)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}} \|T\|_{L_p(I_{2\pi/m})}.$$

Тогда для произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta$, выполнено неравенство

$$L(T)_q \leq \left(\frac{n}{m} \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \frac{L(\cos(\cdot))_q}{\|\cos(\cdot)\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B_2)}} \|T\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)},$$

точное на пространстве T_n , где $B_2 := \left[-\frac{\pi}{2} - \frac{\beta n}{4m}, -\frac{\pi}{2} + \frac{\beta n}{4m} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\beta n}{4m}, \frac{\pi}{2} + \frac{\beta n}{4m} \right]$.

Теорема 4. Пусть $r, n, m \in \mathbf{N}$, $m \leq n$, $q > p > 0$, $\beta \in (0, 2\pi m/n)$, а сплайн $s \in S_{n,r}$ имеет минимальный период $2\pi/m$ и удовлетворяет условию

$$L(s)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}} \|s\|_{L_p(I_{2\pi/m})}.$$

Тогда для произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta$, выполнено неравенство

$$L(s)_q \leq \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{L(\varphi_r)_q}{\|\varphi_r\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B_2)}} \|s\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)},$$

точное на пространстве $S_{n,r}$ 2π -периодических сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n$, $k \in \mathbf{Z}$, где B_2 определено в теореме 3.

Библиографические ссылки

1. Bojanov B. An extension of the Landau-Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos/ B. Bojanov, N. Naidenov // J. d'Analyse Mathematique. — 1999. — Vol. 78. — P. 263–280.
2. Кофанов В. А. Точные верхние грани норм функций и их производных на классах функций с заданной функцией сравнения/ В. А. Кофанов // Укр. мат. журн. — 2011. — Т. 63, № 7. — С. 969–984.
3. Remes E. Sur une propriete extremale des polynomes de Tchebychef/ E. Remes// Зап. науково-дослід. ін-ту математики й механіки та Харків. мат. т-ва. Харків. держ. ун-т. — 1936. — Сер. 4, т. 13, вип. 1. — С. 93 – 95.
4. Ganzburg M. I. On a Remez-type inequality for trigonometric polynomials/ M. I. Ganzburg // J. of Approximation Theory. — 2012. — Vol. 164. — P. 1233 – 1237.
5. Nursultanov E. A sharp Remez inequality for trigonometric polynomials/ E. Nursultanov, S. Tikhonov // Construtive Approximation. — 2013. — Vol. 38. — P. 101 – 132.
6. Ganzburg M. I. Polynomial inequalities on measurable sets and their applications/ M. I. Ganzburg // Construtive Approximation. — 2001. — Vol. 17. — P. 275 – 306.
7. Кофанов В. А. Точные неравенства типа Ремеза для дифференцируемых периодических функций, полиномов и сплайнов/ В. А. Кофанов // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 68, № 2. — С. 227 – 240.
8. Pinkus A. Variations on the Chebyshev and L^q Theories of Best Approximation / A. Pinkus, O. Shisha // J. of Approximation Theory. — 1982. — Vol. 35, № 2. — P. 148–168.
9. Корнейчук Н. П. Неравенства для производных и их приложения / Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун.— К.: Наук. думка, 1992. — 304 с.
10. Кофанов В. А. Неравенства разных метрик для дифференцируемых периодических функций / В. А. Кофанов // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 2. — С. 202 – 212.

Надійшла до редколегії 29.03.2016