УДК 517.5

О. В. Поляков

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,
Днепропетровск, 49050. *E-mail: ov_polyakov@mail.ru*

О приближении тригонометрическими полиномами в пространстве L_2

Получены некоторые неравенства типа Джексона, связывающие величину наилучшего приближения периодических дифференцируемых функций и обобщенного модуля непрерывности старшей производной.

Ключевые слова: наилучшее приближение, модуль непрерывности.

В статi отриманi деякi нерiвностi типу Джексона, що повя'зують величину найкращого наближення перiодичних диференцiйовних функцiй та узагальненого модуля неперервностi старшої похiдної.

Ключовi слова: найкраще наближення, модуль неперервностi.

In this article the some inequalities of the Jackson type put intouuch the value of the best approximation periodic diferentiable functions and generalized modulus of continuity upper derivativ are obtained.

Key words: best approximatioin, modulus of continuity.

Пусть $L_2 = L_2([0;2\pi])$ – пространство измеримых по Лебегу 2π-периодических, интегрируемых на периоде функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Величину

$$E_n(f)_2 = \inf_{t_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_2$$

будем называть наилучшим приближением (наилучшим среднеквадратическим приближением) функции $f(x)$ тригонометрическими многочленами порядка $\leq n-1$ в простанстве L_2.

Функция

$$\omega(f;t) = \sup_{|h|\leq t} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_2$$

называется модулем непрерывности функции $f(x)$ в пространстве L_2.

Неравенства, связывающие наилучшее приближение функции с модулем непрерывности, называют неравенствами типа Джексона. Имеет место большое количество интересных результатов, посвященных неравенствам типа Джексона и их обобщениям в различных пространствах. Что касается наилучших среднеквадратических приближений, то хочется отметить работы [1 – 10], а также список литературы к этим работам. Часто при получении неравенств типа Джексона, а также при решении других задач, связанных с приближением функций, применяют различные модификации классического модуля непрерывности (см., напр., ссылки из [9;10]).

Пусть $f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$ – функция Стеклова функции $f \in L_2$. Рассмотрим разности

$$\Delta_h(f;x) = f_h(x) - f(x), \qquad \Delta_h^k(f;x) = \Delta_h\left(\Delta_h^{k-1}(f;x)\right).$$

В работе [7] рассматривалась величина

$$\Omega_k(f;\delta) = \sup_{0<h\le\delta} \|\Delta_h^k(f;x)\|_2,$$

которая там названа модулем непрерывности k-го порядка функции $f \in L_2$, хотя это определение модуля непрерывности отличается от классического в теории аппроксимации модуля непрерывности [1].

В работе [7] получено следующее неравенство:

$$E_n(f)_2 \le \left(\frac{2n^2}{\pi^2-4}\right)^k \cdot n^{-r} \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{n}} h \cdot \Omega_k^{\frac{1}{k}}\left(f^{(r)};h\right)dh\right)^k, \quad r \in Z_+, \quad n \in N,$$

причем при каждом фиксированном $n \in N$ константа в правой части неравенства уменьшена быть не может.

Рассмотрим еще одну модификацию модуля непрерывности с помощью конструкций из работы [11]. При получении основных результатов мы будем использовать рассуждения из [5; 7 – 10].

Пусть $\Psi_h(u)$ – четная функция, заданная на $[0;h]$, $h > 0$ формулой

$$\Psi_h(u) = \frac{1}{h^2}(h-u).$$

Введем оператор

$$S_h(f;x) = \int_{-h}^{h} f(x-u)\Psi_h(u)du.$$

Положим

$$\hat{\Delta}_h(f;x) = S_h(f;x) - f(x), \qquad \hat{\Delta}_h^k(f;x) = \hat{\Delta}_h\left(\hat{\Delta}_h^{k-1}(f;x)\right).$$

Величину

$$\hat{\Omega}_k(f;\delta) = \sup_{0<h\le\delta} \|\hat{\Delta}_h^k(f;x)\|_2$$

будем называть обобщенным модулем непрерывности функции $f(x)$.

Имеет место

Теорема 1. *Для любой функции $f \in L_2^r$ справедливо неравенство*

$$E_n(f)_2 \leq \left(\frac{24n^3}{\pi^3 - 24\pi + 48}\right)^k \cdot n^{-r} \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2n}} h^2 \cdot \hat{\Omega}_k^{\frac{1}{k}}\left(f^{(r)}; h\right) dh\right)^k, \quad r \in Z_+,\ n \in N,$$

причем при каждом фиксированном $n \in N$ константа в правой части неравенства уменьшена быть не может.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f \in L_2^r$ и

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx$$

– ее ряд Фурье.

Известно, что $E_n(f)_2 = \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right)^{\frac{1}{2}}$, где $c_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$.

Нетрудно проверить, что справедливо равенство

$$\|\hat{\Delta}_h^k\left(f^r; x\right)\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4\sin^2\frac{jh}{2}}{j^2h^2}\right)^{2k} j^{2r}c_j^2(f).$$

В силу неравенства Гельдера будем иметь

$$E_n^2(f)_2 - \sum_{j=n}^{\infty}\frac{4\sin^2\frac{jh}{2}}{j^2h^2}c_j^2(f) = \sum_{j=n}^{\infty}\left(1 - \frac{4\sin^2\frac{jh}{2}}{j^2h^2}\right)c_j^2(f) =$$

$$= \sum_{j=n}^{\infty}|c_j(f)|^{2-\frac{1}{k}}|c_j(f)|^{\frac{1}{k}}\left(1 - \frac{4\sin^2\frac{jh}{2}}{j^2h^2}\right) \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=n}^{\infty}|c_j(f)|^2\right)^{\frac{2k-1}{2k}} \cdot \left(\sum_{j=n}^{\infty}|c_j(f)|^2\left(1 - \frac{4\sin^2\frac{jh}{2}}{j^2h^2}\right)^{2k}\right)^{\frac{1}{2k}} =$$

$$= \left(E_n^2(f)\right)^{\frac{2k-1}{2k}} \cdot \left(n^{-2r}\sum_{j=n}^{\infty}|c_j(f)|^2 n^{2r}\left(1 - \frac{4\sin^2\frac{jh}{2}}{j^2h^2}\right)^{2k}\right)^{\frac{1}{2k}} \leq$$

$$\leq \left(E_n^2(f)\right)^{\frac{2k-1}{2k}} \cdot n^{-\frac{r}{k}}\left(\sum_{j=n}^{\infty}|c_j(f)|^2 j^{2r}\left(1 - \frac{4\sin^2\frac{jh}{2}}{j^2h^2}\right)^{2k}\right)^{\frac{1}{2k}} =$$

$$= \left(E_n^2(f)\right)^{\frac{2k-1}{2k}} \cdot n^{-\frac{r}{k}} \cdot \|\hat{\Delta}_h^k\left(f^r; x\right)\|_2^{\frac{1}{k}}.$$

Отсюда

$$E_n^2(f)_2 = \left(E_n^2(f)_2\right)^{\frac{2k-1}{2k}} \cdot n^{-\frac{r}{k}} \cdot \hat{\Omega}_k^{\frac{1}{k}} \left(f^{(r);h}\right) + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{4\sin^2\frac{jh}{2}}{j^2h^2} c_j^2(f). \qquad (1)$$

Умножим левую и правую части полученного неравенства (1) на h^2 и проинтегрируем по h от 0 до $\frac{\pi}{2n}$.

Рассмотрим выражение

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{4\sin^2\frac{jh}{2}}{j^2h^2} c_j^2(f)dh = 2\sum_{j=n}^{\infty} \frac{c_j^2(f)}{j^2} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} (1-cosjh)dh =$$

$$= 2\sum_{j=n}^{\infty} \frac{c_j^2(f)}{j^2} \left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\sin\frac{\pi j}{2n}}{j}\right).$$

Покажем, что для всех $j = n, n+1, n+2, ...$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{j^2}\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\sin\frac{\pi j}{2n}}{j}\right) \leq \frac{\pi-2}{2n^3}.$$

Перепишем его в виде

$$-\sin\frac{\pi j}{2n} \leq \frac{\pi-2}{2}\left(\frac{j}{n}\right)^3 - \frac{\pi}{2}\frac{j}{n}.$$

Рассмотрим функцию $g(t) = \frac{\pi-2}{2}t^3 - \frac{\pi}{2}t + \sin\frac{\pi t}{2}$, $t \geq 1$. Поскольку $g(1) = 0$, то достаточно исследовать функцию для $t \in [1;2)$, так как $\frac{\pi-2}{2}t^3 - \frac{\pi}{2}t > 1$ для $t \geq 2$ и $\varphi(t) = \frac{\pi-2}{2}t^3 - \frac{\pi}{2}t$, возрастающая функция для $t \geq 1$.

Имеем

$$g'(t) = \frac{3(\pi-2)}{2}t^2 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2}, \quad g'(1) = \pi - 3 > 0,$$

$$g''(t) = 3(\pi-2)t - \frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi t}{2}.$$

Поскольку $12(\pi-2) > \pi^2$, то для всех $t \in [1;2)$ $g''(t) > 0$. Следовательно, $g'(t) > 0$ и функция $g(t)$, возрастающая на $[1;2)$. Отсюда получаем требуемое неравенство.

Таким образом,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{4\sin^2\frac{jh}{2}}{j^2h^2} c_j^2(f)dh \leq \frac{\pi-2}{n^3}\sum_{j=n}^{\infty} c_j^2(f) = \frac{\pi-2}{n^3}E_n^2(f)_2.$$

Тогда, учитывая соотношения (1), имеем

$$\frac{\pi^3}{24n^3}E_n^2(f)_2 \leq \left(E_n^2(f)_2\right)^{\frac{2k-1}{2k}} \cdot n^{-\frac{r}{k}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2n}} h^2 \cdot \hat{\Omega}_k^{\frac{1}{k}} \left(f^{(r)};h\right) dh + \frac{\pi-2}{n^3}E_n^2(f)_2.$$

Отсюда

$$E_n(f)_2 \leq \left(\frac{24n^3}{\pi^3-24\pi+48}\right)^k \cdot n^{-r} \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2n}} h^2 \cdot \hat{\Omega}_k^{\frac{1}{k}}\left(f^{(r)};h\right)dh\right)^k.$$

Пусть $f_*(x)=\cos nx$. Тогда $c_j(f_*)=1$, если $j=n$, и $c_j(f_*)=0$, если $j\neq n$. Будем иметь

$$\hat{\Omega}_k^{\frac{1}{k}}\left(f_*^{(r)};h\right)=\left(1-\frac{4\sin^2\frac{nh}{2}}{n^2h^2}\right)n^{\frac{r}{k}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} h^2\cdot\hat{\Omega}_k^{\frac{1}{k}}\left(f_*^{(r)};h\right)dh=n^{\frac{r}{k}}\left(\frac{\pi^3}{24n^3}-2\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{1-cosnh}{n^2}dh\right)=n^{\frac{r}{k}}\frac{\pi^3-24\pi+48}{24n^3}.$$

То есть для функции $f_*(x)=\cos nx$ имеет место равенство.

Теорема 2. *Пусть $n,k\in N$, $r\in Z_+$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{2^k(\pi-G(\pi))}\leq \sup_{f\in L_2^r, f\neq const}\frac{n^{r-k}E_n(f)_2}{\left(\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\hat{\Omega}_k^{\frac{1}{k}}\left(f^{(r)};h\right)dh\right)^k}<\frac{1}{2^k(2\pi-G(+\infty))},$$

где

$$G(t)=\int_0^t\frac{\sin^2 x}{x^2}dx.$$

Доказательство теоремы 2. Нетрудно проверить, что

$$\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\frac{4\sin^2\frac{nh}{2}}{n^2h^2}dh=\frac{2}{j}G\left(\frac{jt}{2}\right).$$

Поскольку функция $G(t)$ возрастающая и $G(+\infty)$ существует, то

$$\sum_{j=n}^{\infty}\frac{G\left(\frac{j\pi}{n}\right)}{j}c_j^2(f)\leq\frac{G(+\infty)}{n}\sum_{j=n}^{\infty}c_j^2(f)=\frac{G(+\infty)}{n}E_n^2(f)_2.$$

И для оценки сверху достаточно воспользоваться соотношениями (1).

Как и в предыдущей теореме рассмотрим функцию $f_*(x)=\cos nx$. Как уже было отмечено,

$$\hat{\Omega}_k^{\frac{1}{k}}\left(f_*^{(r)};h\right)=\left(1-\frac{4\sin^2\frac{nh}{2}}{n^2h^2}\right)n^{\frac{r}{k}}.$$

Имеем

$$\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\hat{\Omega}_k^{\frac{1}{k}}\left(f_*^{(r)};h\right)dh=n^{\frac{r}{k}}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\left(1-\frac{4\sin^2\frac{nh}{2}}{n^2h^2}\right)dh=$$

$$= n^{\frac{r}{k}} \left(\frac{2\pi}{n} - \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{4\sin^2 \frac{nh}{2}}{n^2h^2} dh \right) = n^{\frac{r}{k}} \frac{2}{n} \left(\pi - \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \right) =$$

$$= 2n^{\frac{r}{k}-1}(\pi - G(\pi)).$$

Отсюда

$$\sup_{f\in L_2^r, f\neq const} \frac{n^{r-k}E_n(f)_2}{\left(\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \hat{\Omega}_k^{\frac{1}{k}}\left(f^{(r)};h\right)dh\right)^k} \geq \frac{n^{r-k}E_n(f_*)_2}{\left(\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \hat{\Omega}_k^{\frac{1}{k}}\left(f_*^{(r)};h\right)dh\right)^k} = \frac{1}{2^k(\pi - G(\pi))}.$$

Библиографические ссылки

1. *Корнейчук, Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений [Текст] Н. П. Корнейчук – М. : Наука, 1976. — 320 с.
2. *Черных, Н. И.* О неравенствах Джексона в пространстве L_2 [Текст] / Н. И. Черных // Тр. мат. ин-та АН СССР. –1967. – № 88. – С. 71–74.
3. *Лигун, А. А.* Некоторые неравенства между наилучшим приближением и модулем непрерывности в простанстве L_2 [Текст] / А. А. Лигун // Мат. заметки.– 1978. – Т. 24, № 6. – С. 785–792.
4. *Доронин, В. Г.* Точная константа в неравенстве Джексона в пространстве L_2 [Текст] / В. Г. Доронин, А. А. Лигун // Укр. мат. журн.– 1994. – Т. 46, № 9. – С. 1261–1265.
5. *Шалаев, В. В.* О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков [Текст] / В. В. Шалаев // Там же – 1991. – Т. 43, № 1. – С. 125–129.
6. *Вакарчук, С. Б.* Неравенства типа Джексона - Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 [Текст] / С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная // Мат. заметки.– 2012. – Т. 92, № 4. – С. 497–514.
7. *Абилов, В. А.* Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ [Текст] / Д. А Абилов, Ф. В. Абилова // Там же.– 2004. – Т. 76, № 6. – С. 803–811.
8. *Вакарчук, С. Б.* Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 [Текст] / С. Б. Вакарчук // Там же.– 2006. – Т. 78, № 5. – С. 11–19.
9. *Вакарчук, С. Б.* Обобщенные характеристики гладкости в неравенствах типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 [Текст] / С. Б. Вакарчук // Там же. – 2015. – Т. 98, № 4. – С. 511–529.
10. *Шалаев, В. В.* Об одной оценке приближения дифференцируемых функций тригонометрическими многочленами [Текст] / В. В. Шалаев // Исслед. по совр. пробл. суммирования и приближения функций и их приложениям. – Д., 1979. – С. 39–43.

Надійшла до редколегії 14.03.2016