ISSN 9125 0912. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2015, вип.* **20**

УДК 517.5

А. М. Пасько

Дніпропетровський національний університет имені Олеся Гончара

Однозв'язність одного простору комплекснозначних функцій

Визначено простори $\mathbb{C}\Omega_n$, побудовано їх клітинні розбиття, аналогічні клітинним розбиттям Ω_n. Доведено однозв'язність $\mathbb{C}\Omega_n$ за умови, що $n \geq 2$.

Ключові слова: однозв'язність, клітинний простір, сплайн.

Определены пространства $\mathbb{C}\Omega_n$, построены их клеточные разбиения, аналогичные клеточным разбиенниям Ω_n. Установлена односвязность $\mathbb{C}\Omega_n$ при $n \geq 2$.

Ключевые слова: односвязность, клеточное пространство, сплайн.

The spaces $\mathbb{C}\Omega_n$ have been defined. It has been established that the spaces $\mathbb{C}\Omega_n, n \geq 2$ are simply connected.

Key words: simply connected space, CW complex, spline.

Нехай $\omega(t)$ – неперервна, монотонно зростаюча на відрізку $[0,\ 1]$ функція, така що $\omega(0) = 0$. Розглянемо розбиття проміжку $[0,\ 1]$ $0 = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_q < \eta_{q+1} = 1$ і набір знаків $s_k = \pm 1, k = 0, \ldots, q$. Задану на відрізку $[0,\ 1]$ функцію

$$F(\eta, s, t) = s_k \cdot \min\{\omega(t - \eta_k), \omega(\eta_{k+1} - t)\}, \qquad t \in (\eta_k, \eta_{k+1}], \tag{1}$$

називають ω-сплайном з q+2 вузлами $\{\eta_k\}_{k=0}^{q+1}$. Символом Ω_n позначимо простір ω -сплайнів указаного вище вигляду, для яких $q \leq n$, а топологія визначена метрикою, індукованою з $L_1[0,\ 1]$.

Клітинним простором (див. [6]) називають хаусдорфів топологічний простір E, поданий у вигляді об'єднання $E = \bigcup\limits_{q=0}^{\infty} \bigcup\limits_{k \in I_q} e_k^q$ попарно неперетинних множин e_k^q (q-вимірних клітин) таким чином, що для кожної клітини e_k^q існує характеристичне відображення q-вимірної кулі D^q у E, звуження якого на внутрішність $\mathrm{Int}D^q$ є гомеоморфізмом між $\mathrm{Int}D^q$ та e_k^q. При цьому мають бути виконані такі аксіоми:

(C) межа кожної клітини $\dot{e}_k^q = \bar{e}_k^q \backslash e_k^q$ міститься в об'єднанні скінченної кількості клітин вимірності, меншої за q;

(W) підмножина $F \subset E$ замкнена в просторі E тоді й лише тоді, коли замкнені всі перетини $F \bigcap \bar{e}_k^q$.

Для клітинного простору E його m-м кістяком $\mathrm{ske}_m(E)$ називають об'єднання всіх клітин, вимірність яких не перевищує m.

Опишемо побудовану в [4; 5] клітинну структуру простору сплайнів Ω_n. Нехай $s = (s_0, s_1, \ldots, s_q)$, $s_k = \pm 1$ і $e^q(s)$ – множина всіх сплайнів (1), які мають рівно q+2 вузли $0 = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_q < \eta_{q+1} = 1$, а $\mathrm{sign} f(t) = s_k$, $t \in (\eta_k, \eta_{k+1})$, $k =$

$= 0, \ldots, q$. Далі для елементів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q$ визначимо ще одну фіктивну координату

$$x_0 = 1 - \sum_{k=1}^{q} x_k$$

й елементи $x \in \mathbb{R}^q$ будемо записувати у вигляді $x = (x_0, x_1, \ldots, x_q)$. Кулю D^q, $q \geq 0$ реалізуємо у вигляді симплекса

$$B^q = \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q : x_k \geq 0, k = 0,\ 1, \ldots, q\}.$$

Тоді для будь-якого набору знаків $s = (s_0, s_1, \ldots, s_q)$, $s_k = \pm 1$ визначимо для клітини $e^q(s)$ характеристичне відображення $\pi_s^q : B^q \longrightarrow \Omega_n$, узявши для кожного вектора $x \in B^q$

$$\eta_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} x_j,\ k = 1, \ldots, q+1,\ \eta_0(x) = 0, \quad \eta(x) = (\eta_0(x), \eta_1(x), \ldots, \eta_{q+1}(x)), \quad (2)$$

$$\pi_s^q(x) = F(\eta(x), s, *),$$

де відображення F визначене рівністю (1).

У [4] визначено групи n-вимірних гомологій простору Ω_n, у [5] повністю розв'язано задачу обчислення груп когомологій цього простору. Подальші дослідження топології простору Ω_n здійснено в [1; 2].

Зазначимо, що для заданої системи вузлів $0 = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_q < \eta_{q+1} = 1$ будь-який сплайн вигляду (1) можна задати рівністю

$$F(\eta, s, t) = s_k{\cdot}min\{\omega(t{-}\eta_k), \omega(\eta_{k+1}{-}t)\}, t \in (\eta_k, \eta_{k+1}], s_k \in \mathbb{R}, |s_k| = 1, k = 0, 1, \ldots, q.$$

Це спостереження дозволяє побудувати аналог простору Ω_n для комплекснозначних функцій. Для заданої системи вузлів $0 = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_q < \eta_{q+1} = 1$ і набору комплексних чисел $s = (s_0, s_1, \ldots, s_q)$, $s_k \in \mathbb{C}, |s_k| = 1$ визначимо функцію

$$F(\eta, s, t) = s_k \cdot \min\{\omega(t - \eta_k), \omega(\eta_{k+1} - t)\},\ t \in (\eta_k, \eta_{k+1}]. \quad (3)$$

Символом $\mathbb{C}\Omega_n$ позначимо простір функцій вигляду (3), для яких $q \leq n$, а топологія визначена метрикою, індукованою з $L_1[0,\ 1]$.

Побудуємо клітинне розбиття простору $\mathbb{C}\Omega_n$, аналогічне до описаного вище клітинного розбиття простору Ω_n. Для цього розглянемо двосимвольний алфавіт $A = \{1, e\}$. Зафіксуємо ціле число $q \geq 0$ і для кожного слова $u = u_0 u_1 \ldots u_q$ із символів $u_k \in A$ розглянемо множину $c^q(u)$ заданих рівністю (3) сплайнів, які мають рівно $q{+}2$ вузли $0 = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_q < \eta_{q+1} = 1$, а числа $s = (s_0, s_1, \ldots, s_q)$ визначаються як

$$s_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо } u_k = 1, \\ e^{i\phi_k}, \text{де } 0 < \phi_k < 2\pi, & \text{якщо } u_k = e. \end{cases}$$

Нехай $h = h(u)$ – кількість рівних e символів слова $u = u_0 u_1 \dots u_q$, $0 \le h(u) \le q+1$. Розглянемо реалізацію $q+h$-вимірної кулі у вигляді декартового добутку

$$B^q \times [0, 2\pi]^h = \{(x_0, x_1, \dots, x_q; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_h) : x_k \ge 0, \sum_{k=0}^{q} x_k = 1, 0 \le \theta_j \le 2\pi\}.$$

Нехай $u_{k_1}, u_{k_2}, \dots, u_{k_h}$ – усі рівні e літери слова u, розташовані в порядку зростання номерів. Для $(x, \theta) = (x_0, x_1, \dots, x_q; \theta_1, \dots, \theta_h) \in B^q \times [0, 2\pi]^h$ задамо характеристичне відображення $\psi_u^q : B^q \times [0, 2\pi]^h \longrightarrow \mathbb{C}\Omega_n$ клітини $c^q(u)$ так:

$$\psi_u^q(x, \theta) = F(\eta(x), s(u, \theta), *),$$

де F – функція, визначена рівністю (3) для системи вузлів (2) та чисел

$$s_k(u, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k \text{ відмінне від } k_1, \dots, k_h, \\ e^{i\theta_j}, & \text{якщо } k = k_j. \end{cases}$$

Очевидно, множини $c^q(u)$, $q \le n$, та відповідні їм характеристичні відображення ψ_u^q утворюють клітинну структуру на $\mathbb{C}\Omega_n$, причому кожна множина $c^q(u)$ є клітиною вимірності $q + h(u)$. Простір $\mathbb{C}\Omega_n$ складається з однієї нульвимірної клітини $c^0(1)$; двох одновимірних клітин $c^0(e)$, $c^1(11)$; трьох двовимірних $c^1(e1)$, $c^1(1e)$, $c^2(111)$; п'яти тривимірних $c^1(ee)$, $c^2(e11)$, $c^2(1e1)$, $c^2(11e)$, $c^3(1111)$ і т.д. Найвищу вимірність $2n+1$ має одна-єдина клітина $c^n(ee\dots e)$. Вимірністю $\mathrm{dim}E$ клітинного простору E називають найбільшу з вимірностей його клітин, отже, $\mathrm{dim}\mathbb{C}\Omega_n = 2n+1$.

Нехай E – клітинний простір, q-вимірними ланцюгами постору E називають формальні суми $\sum\limits_{k \in I_q} m_k e_k^q$, де e_k^q – орієнтовані q-вимірні клітини (орієнтації задано характеристичними відображеннями), а m_k – цілі числа, причому $m_k \ne 0$ лише для скінченної кількості значень індексу k. Множина q-вимірних ланцюгів простору E із визначеною природним способом операцією додавання утворює абелеву групу, яку називають групою q-вимірних ланцюгів і позначають $C_q(E)$.

Із послідовністю груп $C_q(E), q \ge 0$, асоціюють послідовність гомоморфізмів $\partial = \partial_q : C_q(E) \longrightarrow C_{q-1}(E)$ (вважають, що $C_{-1}(E) = 0$). Для кожної клітини e_k^q

$$\partial e_k^q = \sum_{r \in I_{q-1}} [e_k^q : e_r^{q-1}] e_r^{q-1},$$

цілі числа $[e_k^q : e_r^{q-1}]$ називають коефіцієнтами інцидентності, а утворену з них матрицю $\triangle_q(E)$ – матрицею інцидентності. Коефіцієнт інцидентності $[e_k^q : e_r^{q-1}]$ можна грубо вважати кількістю входжень клітини e_r^{q-1} до межі клітини e_k^q, причому кожне входження підраховують зі знаком $+1$, якщо власна (задана характеристичним відображенням π_r^{q-1}) орієнтація клітини e_r^{q-1} збігається з орієнтацією межі e_k^q, і зі знаком -1, якщо протилежна їй.

Нехай $u = u_0 \dots u_q$ – слово із $q+1$ символів алфавіту A. Позначимо $u_0 \dots \hat{u}_k \dots u_q$ слово, одержане зі слова $u_0 \dots u_q$ вилученням одного із символів $u_k, 0 \le k \le q$. Неважко переконатися, що для $q + h(u)$-вимірної клітини $c^q(u)$ простору $\mathbb{C}\Omega_n$

$$\partial c^q(u) = \sum_{k:\ u_k=1} (-1)^k c^{q-1}(u_0 \dots \hat{u}_k \dots u_q).$$

За допомогою цієї формули обчислимо матрицю інцидентності простору $\mathbb{C}\Omega_n$, $n \ge 2$, у вимірності 2.

$$\triangle_2(\mathbb{C}\Omega_n) = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} & c^1(1e) & c^1(e1) & c^2(111) \\ \hline c^1(11) & 0 & 0 & 1 \\ \hline c^0(e) & +1 & -1 & 0 \end{array} \right\| \qquad (4)$$

Однозв'язним називають лінійно-зв'язний топологічний простір, що має тривіальну фундаментальну групу. У [1] було доведено однозв'язність простору Ω_n. Основним результатом цієї статті є теорема.

Теорема 1. *Простори $\mathbb{C}\Omega_n$, $n \ge 2$, – однозв'язні.*

Доведення. Нехай x_0 – точка, з якої складається єдина нульвимірна клітина $c^0(1)$ простору $\mathbb{C}\Omega_n$. Розглянемо відображення вкладення $\mathrm{in} : \mathrm{ske}_1(\mathbb{C}\Omega_n) \longrightarrow \mathbb{C}\Omega_n$. Згідно з [3, с. 425] індукований відображенням in гомоморфізм фундаментальних груп $\mathrm{in}_* : \pi(\mathrm{ske}_1(\mathbb{C}\Omega_n), x_0) \longrightarrow \pi(\mathbb{C}\Omega_n, x_0)$ є епіморфізмом, ядро якого породжується якимось чином перенесеними в точку x_0 гомотопічними класами відображень приклеювання, що відповідають двовимірним клітинам. Кістяк $\mathrm{ske}_1(\mathbb{C}\Omega_n)$ складається з двох одновимірних клітин (інтервалів) $c^0(e), c^1(11)$ та однієї нульвимірної $c^0(1)$, тобто гомеоморфний букету двох кіл. У такому разі $\pi(\mathrm{ske}_1(\mathbb{C}\Omega_n), x_0)$ – вільна група з двома твірними a, b, перша відповідає шляху вздовж клітини $c^1(11)$, друга – вздовж $c^0(e)$. Розглянемо двовимірну клітину $c^2(111)$. Її межа складається з трьох екземплярів одновимірної клітини $c^1(11)$, причому з матриці інцидентності (4) випливає, що рухаючись уздовж межі $c^2(111)$, ми проходимо клітину $c^1(11)$ двічі в додатному та один раз у від'ємному напрямках. Звідси випливає, що гомотопічний клас відображення приклеювання, який відповідає клітині $c^2(111)$, дорівнює $aa^{-1}a = a$, отже, $a \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{in}_*$. Розглянемо двовимірну клітину $c^1(1e)$. Її межа складається з клітини $c^0(e)$ та двох екземплярів клітини $c^1(11)$, причому, як випливає з (4), $c^0(e)$ проходимо в додатному, а $c^1(11)$ – один раз у додатному, другий раз у від'ємному напрямках. Звідси випливає, що гомотопічний клас відображення приклеювання, відповідний клітині $c^1(1e)$, дорівнює aba^{-1}, отже, $aba^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{in}_*$. А оскільки $a \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{in}_*$, то $b \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{in}_*$. Таким чином, $\pi(\mathrm{ske}_1(\mathbb{C}\Omega_n), x_0) = \mathrm{Ker}\ \mathrm{in}_*$ і група $\pi(\mathbb{C}\Omega_n, x_0)$ – тривіальна. Доведення теореми завершено.

Зазначимо, що простори $\mathbb{C}\Omega_0$, $\mathbb{C}\Omega_1$ не є однозв'язні. Простір $\mathbb{C}\Omega_0$ (складається з однієї нульвимірної $c^0(1)$ та однієї одновимірної клітини $c^0(e)$) гомеоморфний колу, тож $\pi(\mathbb{C}\Omega_0, x_0) = \mathbb{Z}$. У просторі $\mathbb{C}\Omega_1$ на відміну від $\mathbb{C}\Omega_n$, $n \ge 2$ бракує двовимірної клітини $c^2(111)$, через яку $a \in \operatorname{Ker} \operatorname{in}_*$. Отже, $\pi(\operatorname{ske}_1(\mathbb{C}\Omega_1), x_0)$ – вільна група з двома твірними a, b, а ядро $\operatorname{Ker} \operatorname{in}_*$ породжується елементом aba^{-1}. Але з належності $aba^{-1} \in \operatorname{Ker} \operatorname{in}_*$ випливає

$$\operatorname{in}_*(b) = \operatorname{in}_*(a^{-1}aba^{-1}a) = \operatorname{in}_*(a^{-1})\operatorname{in}_*(aba^{-1})\operatorname{in}_*(a) = \operatorname{in}_*(a^{-1})\operatorname{in}_*(a) = 1,$$

тобто $b \in \operatorname{Ker} \operatorname{in}_*$. Це означає, що $\pi(\mathbb{C}\Omega_1, x_0)$ – вільна група з однією твірною a, іншими словами, $\pi(\mathbb{C}\Omega_1, x_0) = \mathbb{Z}$.

Бібліографічні посилання

1. **Кощеев В. А.** Фундаментальные группы пространств обобщённых совершенных сплайнов / В. А. Кощеев // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2009. – Т. 15, №1. – С. 159–165.
2. **Пасько А. Н.** О гомотопических группах пространств обобщённых совершенных сплайнов / А. Н. Пасько// Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Математика. – 2012. – Вип.17. – С. 138–140.
3. **Рохлин В. А.** Начальный курс топологии. Геометрические главы / В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс. – М., 1977. – 488 с.
4. **Рубан В. И.** Клеточное разбиение пространств Ω-сплайнов / В. И. Рубан // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Д., 1985. – С. 39–40.
5. **Рубан В. И.** Клеточная структура и когомологии пространств обобщённых совершенных сплайнов / В. И. Рубан // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Математика. – 1999. – Вип. 4. – С. 85–90.
6. **Фоменко А. Т.** Курс гомотопической топологии / А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. – М., – 1989. – 494 с.

Надійшла до редколегії 02.06.2015