УДК 517.5

Н. В. Парфiнович
Днiпропетровський нацiональный унiверситет имені Олеся Гончара

Про екстремальнi пiдпростори для поперечникiв класiв згорток

Знайденi точнi значення найкращих L_1–наближень класiв $K * F$ $(r \in \mathbb{N})$ перiодичних функцiй $K * f$, таких, що f належить заданiй перестановочно–iнварiантнiй множинi F, а K є 2π-перiодичним ядром, що не збiльшує осциляцiю, пiдпросторами узагальнених полiномiальних сплайнiв з вузлами в точках $2k\pi/n$ $(n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z})$. Показано, що цi пiдпростори є екстремальними для поперечникiв за Колмогоровим вiдповiдних функцiональних класiв

Ключовi слова: найкраще наближення, поперечник, перiодична функцiя, згортка, сплайн.

Найдены точные значения наилучших L_1–приближений классов $K * F$ $(r \in \mathbb{N})$ периодических функций $K * f$, таких, что f принадлежит заданному перестановочно–инвариантному множеству F, а K является 2π-периодическим ядром, не увеличивающим осцилляцию, подпространствами обобщенных полиномиальных сплайнов с узлами в точках $2k\pi/n$ $(n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z})$. Показано, что эти подпространства являются экстремальными для поперечников по Колмогорову соответствующих функциональных классов

Ключевые слова: наилучшее приближение, поперечник, периодическая функция, свертка, сплайн.

We obtained the exact values of the best L_1–approximations of the classes $K * F$ $(r \in \mathbb{N})$ of periodic functions $K * f$ such that f belongs to a given rearrangement-invariant set F and K is 2π - periodic not increasing oscillation kernel by subspaces of generalized polynomial splines with nodes in points $2k\pi/n$ $(n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z})$. It is shown that these subspaces are extremal for the Kolmogorov widths of the corresponding functional classes

Key words: best approximation, width, periodic function, convolution, spline.

1. Необхiднi позначення i означення

Нехай L_p, $1 \le p \le \infty$, – простори 2π-перiодичних функцiй $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з вiдповiдними нормами $\| \cdot \|_{L_p} = \| \cdot \|_p$; $p' = p/(p-1)$.

Нехай H– пiдпростiр простору L_p и $g \in L_{p'}$. Якщо для всiх $h \in H$

$$\int\limits_0^{2\pi} g(x)h(x)\,dx = 0,$$

то будемо писати $g \perp H$. Якщо H– пiдпростiр констант, то замiсть $g \perp H$ будемо використовувати позначення $g \perp 1$.

Нехай задана множина $F \subset L_1$. Для $r = 1, 2, ...$, позначимо через $W^r F$ клас функцій $f \in L_1$, у яких $(r-1)$-а похідна $f^{(r-1)}$ ($f^{(0)} = f$) локально абсолютно неперервна і $f^{(r)} \in F$. Відзначимо, що якщо $F-$ одинична куля простору L_p, то множина $W^r F = W_p^r$ – це стандартний соболєвський клас функцій, у яких $(r-1)$-а похідна локально абсолютно неперервна і $\|f^{(r)}\|_p \le 1$. Як завжди, згортку $K * \varphi$ функції $K \in L_1$ (ядра згортки) і $\varphi \in L_1$ означимо рівністю

$$(K * \varphi)(x) = \int\limits_0^{2\pi} K(x-t)\varphi(t)\,dt.$$

Для ядра K покладемо $\mu = \mu(K) = 1$, якщо $K \perp 1$ и $\mu = \mu(K) = 0$ в супротивному випадку.

Нехай задані ядро K і множина $F \subset L_1$. Через $K * F$ позначимо клас функцій виду

$$f(x) = a\mu + (K * \varphi)(x), \;\; \varphi \in F, \;\; \varphi \perp \mu, \;\; a \in \mathbb{R}.$$

У подальшому ми розглядаємо задачі наближення для класів типу $K * F$, частинними випадками яких є різні важливі для теорії наближення класи функцій.

Нехай B_r $(r = 1, 2, ...)$ – ядра Бернулі:

$$B_r(x) = \pi^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-r} \cos(mx - \pi r/2),$$

$f \in L_1$. Тоді $B_r * F = W^r F$.

Узагальнення ядер Бернулі в різних напрямах приводять до багатьох цікавих і важливих сукупностей ядер і класів функцій.

Неперервне на $(0, 2\pi)$ і таке, що не є тригонометричним поліномом ядро K, будемо називати CVD-ядром (і писати $K \in CVD$), якщо $\nu(a\mu + K * \varphi) \le \nu(\varphi)$ (тут і срізь нижче $\nu(g)$ – число змін знаку на періоді у 2π-періодичної функції g) для довільних $\varphi \in C$, $\varphi \perp \mu$ і $a \in \mathbb{R}$. Очевидно, що $B_r \in CVD$. Ряд питань теорії CVD-ядер викладений в [1, 2].

Для невід'ємної функції $f \in L_1$ позначимо через $r(f, t)$ неспадну перестановку (див. [3, с. 130]) звуження функції f на проміжок $[0, 2\pi]$. Якщо g – довільна функція з L_1, то покладемо (див. [4, с. 99])

$$\Pi(g, t) := r(g_+, t) - r(g_-, 2\pi - t),$$

де $g_{\pm} := \max\{\pm g(t), 0\}$.

Множину $F \in L_1$ назвемо Π- інваріантною, якщо з того, що $f \in F$ и $\Pi(g) = \Pi(f)$, випливає, що $g \in F$.

Найкраще наближення класу $M \subset L_p$ множиною H із L_p в метриці L_p – це величина

$$E(M, H)_p = \sup_{f \in M} \inf_{h \in H} \|f - h\|_p.$$

Величини

$$d_n(M, L_p) = \inf_{H_n} E(M, H)_p, \tag{1.1}$$

де $\inf\limits_{H_n}$ береться по всім підпросторам H_n простору L_p, вимірність яких не перевищує n, називаються поперечниками Колмогорова класу M в просторі L_p. Підпростори H_n, які реалізують точну нижню межу в правій частині (1.1), називаються екстремальними.

Для кожного натурального n і $m = 0, 1, ...$ через T_{2n-1} позначимо простір тригонометричних поліномів порядку не вище $n-1$, через $S^1_{2n,m}$ – простір 2π-періодичних поліноміальних сплайнів порядку m дефекту 1 з вузлами в точках $j\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$, а через $S^2_{2n,m}$ $(n, m \in \mathbb{N})$– простір 2π-періодичних поліноміальних сплайнів порядку m дефекту 2, з вузлами в точках $t_j = 2j\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$. Відзначимо, що вимірність цього простору для будь-якого m дорівнює $2n$ (див., напр., [5, наслідок 2.3.7])

Нехай $\varphi_{\lambda,m}(t)$ $(m \in \mathbb{N},\ \lambda > 0)$– m-й $2\pi/\lambda$-періодичний інтеграл з нульовим середнім значенням на періоді від функції $\varphi_{\lambda,0}(t) = \operatorname{sign}\sin\lambda\text{t}$.

2. Деякі відомі результати

Добре відомо (див., напр., [5, теореми 4.2.4, 5.4.8, 8.1.13]), що при всіх $n, r = 1, 2, ...$, $1 \le p \le \infty$, виконуються рівності

$$E(W^r_p, T_{2n-1})_1 = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}; \tag{2.1}$$

$$E(W^r_p, S^1_{2n,m})_1 = \|\varphi_{n,r}\|_{p'},\ \ m = r-1, r, ...; \tag{2.2}$$

$$d_{2n-1}(W^r_p, L_1) = d_{2n}(W^r_p, L_1) = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}. \tag{2.3}$$

При цьому простори T_{2n-1} є екстремальними для поперечників $d_{2n-1}(W^r_p, L_1)$ і $d_{2n}(W^r_p, L_1)$, а простори $S^1_{2n,m}$, при всіх $m \ge r-1$ – для поперечників $d_{2n}(W^r_p, L_1)$.

Рівність (2.1) при $p = 1$ отримана С.М. Нікольским [6], для $p > 1$ її здобув Л.В. Тайков [7], при $p = \infty$ незалежно та іншим методом цей результат отримала С.П. Туровець [8]. Співвідношення (2.2) установлене А.О. Лигуном [9]. Оцінку снизу для непарних поперечників при $p = 1$ отримали незалежно Ю.І. Маковоз [10] і Ю.Н Суботін [11, 12], а при $p = \infty$ Ю.І. Маковоз [13].Оцінка знизу для парних поперечників при $p = 1, \infty$ належить В.І. Рубану (див., напр. [3, розд. 10]). Для $1 < p < \infty$ співвідношення (2.3) незалежно і різними методами отримали А.О Лігун [14], Ю.І. Маковоз [15], А. Пінкус [16].

В [17] установлено, что для довільної П-інваріантної множини F і будь-яких $n, r = 1, 2, ...;$ $m \ge r$ мають місце такі рівності

$$E(W^r F, T_{2n-1})_1 = E(W^r F, S^1_{2n,m})_1 = \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp 1}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(f, t)\Pi(\varphi_{n,r}, t)\, dt,$$

і

$$d_{2n-1}(W^rF,L_1)=d_{2n}(W^rF,L_1)=\sup_{\substack{f\in F\\ f\perp 1}}\int\limits_0^{2\pi}\Pi(f,t)\Pi(\varphi_{n,r},t)\,dt. \qquad (2.4)$$

При цьому простори T_{2n-1} є екстремальними для поперечників $d_{2n-1}(W^rF,L_1)$ і $d_{2n}(W^rF,L_1)$, а простори $S^1_{2n,m}$ при всіх $m\geq r$ – для поперечників $d_{2n}(W^rF,L_1)$.

В [18] доведено, що для довільної П-інваріантної множини F, $K\in CVD$ і будь-яких $n=1,2,...$, $r=0,1,...$ мають місце такі рівності

$$E(K*F,T_{2n-1})_1=E(K*F,K*S^1_{2n,r})_1=\sup_{\substack{f\in F\\ f\perp\mu}}\int\limits_0^{2\pi}\Pi(f,t)\Pi(K(-\cdot)*\varphi_{n,o},t)\,dt.$$

Відзначимо, що

$$d_{2n-1}(K*F,L_1)=d_{2n}(K*F,L_1)=\sup_{\substack{f\in F\\ f\perp\mu}}\int\limits_0^{2\pi}\Pi(f,t)\Pi(K(-\cdot)*\varphi_{n,o},t)\,dt. \qquad (2.5)$$

При цьому простори T_{2n-1} є екстремальними для поперечників $d_{2n-1}(K*F,L_1)$ і $d_{2n}(K*F,L_1)$, а простори $K*S^1_{2n,r}$ $(r=0,1,...)$ – для поперечників $d_{2n}(K*F,L_1)$.

У випадку $F=W^0_p$ результат (2.5) належить А. Пінкусу [19], а у випадку довільної П - інваріантної множини F – В.Ф. Бабенку [20].

В роботі [21] знайдено точні зачення найкращих L_1-наближень класів W^rF сплайнами з $S^2_{2n,m}$ при $m\geq r$ і показано, що $S^2_{2n,m}$ разом з T_{2n-1} і $S^1_{2n,m}$ є екстремальними підпросторами для поперечників $d_{2n}(W^rF,L_1)$

3. Апроксимація узагальненими сплайнами. Формулювання результатів

В даній роботі ми знайдемо точні значення найкращих L_1-наближень класів $K*F$ ($K\in CVD$, F – довільна П-інваріантна множина 2π-періодичних функцій) підпросторами $K*S^2_{2n,k}$ $(k\in\mathbb{N})$.

Теорема 1. *Нехай $n,k\in\mathbb{N}$, $1\leq p\leq\infty$, $K\in CVD$, F – довільна* П-*інваріантна множина 2π-періодичних функцій. Тоді*

$$E(K*F,K*S^2_{2n,k})_1=\sup_{\substack{f\in F\\ f\perp\mu}}\int\limits_0^{2\pi}\Pi(f,t)\Pi(K(-\cdot)*\varphi_{n,0},t)\,dt. \qquad (3.1)$$

Зокрема,

$$E(K*W^0_p,K*S^2_{2n,k})_1=\|K(-\cdot)*\varphi_{n,0}\|_{p'}. \qquad (3.2)$$

Результати теореми 1 разом зі співвідношенням (2.5) показують, що $K * S^2_{2n,k}$ $(k \in \mathbb{N})$ є екстремальними підпросторами для поперечників $d_{2n}(K * F, L_1)$.

Вагому роль при доведенні теореми 1 буде відігравати слідуюча лема, що пояснює зміст ортогональності функції f підпростору $K * S^2_{2n,k}$.

Лема 1. *Для того, щоб 2π-періодична функція $f \in L_1$ була ортогональна простору $K * S^2_{2n,k}$ $(k \in \mathbb{N},\ K \in CVD)$ необхідно і достатньо, щоб виконувались рівності:*

$$(B_{k+1} * K(-\cdot) * f)(t_1) = (B_{k+1} * K(-\cdot) * f)(t_2) = ... = (B_{k+1} * K(-\cdot) * f)(t_n)$$

і

$$((B_{k+1} * K(-\cdot) * f))' = ((B_{k+1} * K(-\cdot) * f))' = ... = ((B_{k+1} * K(-\cdot) * f))' = 0.$$

Нам знадобиться також таке твердження

Лема 2. *Нехай $K \in CVD$. Якщо $f \in B_l * K * F$ $(l = 1, 2, ...)$ і при деякому $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність*

$$\|f_\pm\|_C \le \|(B_l * K * \varphi_{n,o})_\pm\|_C,$$

то функція f має μ-властивість відносно функції $B_l * K * \varphi_{n,0}(t)$.

Означення μ-властивості див. в [5, с.109]

Крім того при доведенні теорем 1 і 2 нами істотно буде використовуватись слідуюча теорема, яка має і самостійний інтерес.

Теорема 2. *Нехай $K \in CVD$, $n, l \in \mathbb{N}, l \ge 2$, $t_j = 2j\pi/n$ для $j = 1, 2, ..., n$. Нехай $\widetilde{\varphi}(t) = B_l * K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(t + \alpha) + \|B_l * K(-\cdot) * \varphi_{n,0}\|_\infty$, де α обрано з умови $\widetilde{\varphi}(0) = 0$. Тоді для будь-якої функції $g \in B_l * K(-\cdot) * W^0_\infty$ такої, що*

$$g(t_1) = g(t_2) = ... = g(t_n)$$

і

$$g'(t_1) = g'(t_2) = ... = g'(t_n) = 0,$$

мають місце твердження:
a) $\forall t \in \mathbb{R}$ $|g(t) - g(0)| \le \widetilde{\varphi}(t)$, притому, якщо $|g(t) - g(0)|$ відмінна від $\widetilde{\varphi}(t)$, то знак рівності має місце лише в точках t_j, $j = 1, 2, ..., n$;
b) $\|g^{(k)}_\pm\|_\infty \le \|(B_{l-k} * K(-\cdot) * \varphi_{n,0})_\pm\|_\infty$, $k = 1, 2, ..., l$.

4. Доведення

Спочатку ми доведемо леми 1 і 2, потім теорему 2, а вже потім теорему 1.

Доведення леми 1. Відомо, (див. [5, наслідок 2.3.6]), що будь-який сплайн s із $S^2_{2n,k}$ в єдиний спосіб зоражується у вигляді

$$s(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j B_{k+1}(t - t_j) + \sum_{j=1}^{n} b_j B_k(t - t_j), \tag{4.1}$$

де

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(t)\, dt, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j = 0,$$

$B_m(t)$ $m = 1, 2, ...$ – ядро Бернуллі.

Тоді будь-який елемент $K * s \in K * S^2_{2n,k}$ можна зобразити у вигляді

$$K * s(t) = a_0\mu + \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^{2\pi} K(x-t)B_{k+1}(t-t_j)\, dt + \sum_{j=1}^{n} b_j \int_0^{2\pi} K(x-t)B_k(t-t_j)\, dt, \tag{4.2}$$

де $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j = 0$.

Нехай $f \perp K * S^2_{2n,k}$, тобто $\int\limits_0^{2\pi} f(t)(K * s)(t)\, dt = 0$ для будь-кого $K * s \in K * S^2_{2n,k}$. Перш за все відзначимо, що оскільки $K * S^2_{2n,k}$ містить константи, то $f \perp 1$. З урахуванням (4.2) отримаємо

$$\int_0^{2\pi} f(x) \left(a_0\mu + \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^{2\pi} K(x-t)B_{k+1}(t-t_j)\, dt + \sum_{j=1}^{n} b_j \int_0^{2\pi} K(x-t)B_k(t-t_j)\, dt \right) dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)K(x-t)B_{k+1}(t-t_j)\, dt\, dx + \sum_{j=1}^{n} b_j \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)K(x-t)B_k(t-t_j)\, dt\, dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^{2\pi} B_{k+1}(t-t_j)(K(-\cdot) * f)(t)\, dt + \sum_{j=1}^{n} b_j \int_0^{2\pi} B_k(t-t_j)(K(-\cdot) * f)(t)\, dt$$

За рахунок довільності a_j і b_j і парності (непарності) ядра Бернулі можемо написати

$$\sum_{j=1}^{n} a_j B_{k+1} * (K(-\cdot) * f)(t_j) + \sum_{j=1}^{n} b_j B_k * (K(-\cdot) * f)(t_j) = 0. \tag{4.3}$$

Нехай $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, тоді для виконання останньої рівності необхідно, щоб для довільного набору $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ було $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j B_k * (K(-\cdot) * f)(t_j) = 0$, а ця рівність можлива , лише якщо $B_k * (K(-\cdot) * f)(t_j) = 0$ для всіх $j = 1, 2, ..., n$.

Нехай тепер $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$. Рівність $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j B_{k+1} * (K(-\cdot) * f)(t_j) = 0$ рівносильна ортогональності векторів $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ і $\overline{B_{k+1} * K(-\cdot) * f} = (B_{k+1} * K(-\cdot) * f(t_1), B_{k+1} * K(-\cdot) * f(t_2), ..., B_{k+1} * K(-\cdot) * f(t_n))$. Умова $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j = 0$ виділяє в просторі $\mathbb{R}^n$ гіперплощину з нормальним вектором $(1, 1, ..., 1)$, який в свою чергу, паралельний вектору $\overline{B_{k+1} * K(-\cdot) * f}$, а значить, $B_{k+1} * K(-\cdot) * f(t_1) = B_{k+1} * K(-\cdot) * f(t_2) = ... = B_{k+1} * K(-\cdot) * f(t_n)$. Необхідність встановлена. В силу співвідношення (4.3) і умови $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j = 0$ достатність очевидна.

Лема 1 доведена.

Доведення леми 2 Припустимо, що f не наділена μ-властивістю відносно $B_l * K * \varphi_{n,0}(t)$, тобто на інтервалі (τ_1, τ_2) монотонності $B_l * K * \varphi_{n,0}(t)$ різниця $B_l * K * \varphi_{n,0}(t) - f(t + \alpha)$ при деякому α змінює знак всупереч μ-властивості, а саме з "+"на "$-$ якщо $B_l * K * \varphi_{n,0}(t)$ зростає, або з "$-$"на "+ якщо $B_l * K * \varphi_{n,0}(t)$ спадає. З міркувань непрервності зрозуміло, цей факт матиме місце при достатньо малому $\varepsilon > 0$ і для різниці

$$\delta(t) = B_l * K * \varphi_{n,0}(t) - (1-\varepsilon) f(t+\alpha) = B_l * K * (\varphi_{n,0}(t) - (1-\varepsilon) f_0(t+\alpha)) = B_l * K * \delta_0(t).$$

Оскільки $(1 - \varepsilon)\|f_\pm\|_C < \|(B_l * K * \varphi_{n,o})_\pm\|_C$, то $\delta(t)$ в точках τ_1 и τ_2 має знак функції $B_l * K * \varphi_{n,0}(t)$. Це означає, що на інтервалі (τ_1, τ_2) функція $\delta(t)$ змінює знак якнайменше 3 рази, а на періоді $[\tau_1, \tau_1 + 2\pi]$ принаймні $2n + 2$ рази. Оскільки $B_l * K \in CVD$, то число істотних змін знаку функції $\delta_0(t)$ має бути не менше $2n+2$, в той час як $(1 - \varepsilon)|f_0(t + \alpha)| < 1$ і різниця $\delta_0(t) = \varphi_{n,0}(t) - (1 - \varepsilon) f_0(t + \alpha)$ має на періоді рівно $2n$ змін знаку.

Лему 2 доведено.

Доведення тереми 2. Нехай $\widetilde{g}(t) = g(t) - g(0)$. Функції $\widetilde{\varphi}(t)$ і $\widetilde{g}(t)$ мають нулі кратності 2 в точках t_j, $j \in \mathbb{Z}$. Для доведення твердження а) припустимо, що знайдеться t_* таке, що $|\widetilde{g}(t_*)| > \widetilde{\varphi}(t_*)$. Для придатного $0 < |\lambda| < 1$ отримаємо $\lambda\widetilde{g}(t_*) = \widetilde{\varphi}(t_*)$. Нехай $\delta(t) = \widetilde{\varphi}(t) - \lambda\widetilde{g}(t) = c + B_l * K(-\cdot) * (\varphi_{n,0} - \lambda g_0)(t)$, $g_0 \in W^0_\infty$. Оскільки $\|\lambda g_0\|_\infty < 1$, а $\|\varphi_{n,0}\|_\infty = 1$, то на жодному з відрізків $[\alpha, \beta]$ додатної довжини функція $\delta_0(t) = (\varphi_{n,0} - \lambda g_0)(t)$, а значить, і $\delta(t)$ не перетворюються тотожньо на нуль, отже всі нулі $\delta(t)$ є ізольованими. Зрозуміло, що функція $\delta(t)$ має нуль в точці t_* і нулі кратності 2 в точках t_j, $j \in \mathbb{Z}$, тобто всього на періоді функції $\delta(t)$ має принаймні 2n+1 нуль з урахуванням кратності. Тоді у $\delta'(t)$ буде принаймні 2n+1 різних нулів, а у $K(-\cdot) * \delta_0(t)$ буде не менше 2n+2 змін знаку на періоді. Проте, $\delta_0(t) = \varphi_0(t) - \lambda g_0(t)$ має на періоді рівно 2n змін знаку, що суперечить тому, що $K(-\cdot) \in CVD$. Твердження а) доведене. Доведемо твердження b). Нехай $t_{\max} \in (0, 2\pi)$ таке, що $|\widetilde{g}'_{+}(t_{\max})| = \|\widetilde{g}'_{+}\|_{\infty}$, и $j \in \mathbb{Z}$ обране з умови $t_{\max} \in (t_j, t_{j+1})$. Припустивщи, що $|\widetilde{g}'(t_{\max})| > \|\widetilde{\varphi}'_{+}\|_{\infty}$, ми зможемо вказати таке $0 < |\lambda| < 1$, що

$$\lambda\widetilde{g}'(t_{\max}) = \|\widetilde{\varphi}'_{+}\|_{\infty} = \widetilde{\varphi}'(t^1_{\max}). \tag{4.4}$$

Крім того,

$$\lambda\widetilde{g}'(t_j) = \lambda\widetilde{g}'(t_{j+1}) = \widetilde{\varphi}'(t_j) = \widetilde{\varphi}'(t_{j+1}) = 0. \tag{4.5}$$

Зрозуміло, що функції $\lambda\widetilde{g}'(t)$ і $\widetilde{\varphi}'(t)$ задовольняють умови теореми Колмогорова про порівняння похідних [22] (див. також [5, теорема 3.3.2]). Враховуючи цю обставину і співвідношення (4.4), (4.5), неважко встановити (достатньо, наприклад, скористатись пропозицією 5.6.6 із [3]), що $t_{\max}$ розташоване між $t^1_{\max}$ и $t^1_{\min}$, де $t^1_{\max}$ и $t^1_{\min}$ – точки максимуму і мінімуму функції $\widetilde{\varphi}'(t)$, що містяться в проміжку (t_j, t_{j+1}). Нехай $t^0_j \in (t_j, t_{j+1})$ така, що $\widetilde{\varphi}'(t^0_j) = 0$.

Зрозуміло, що знайдуться точки $t^1_j \in [t_j, t^0_j]$, $t^2_j \in [t^0_j, t_{j+1}]$ такі, що

$$\lambda\widetilde{g}'(t^1_j) = \lambda\widetilde{g}'(t^2_j) = 0; \;\; t_{\max} \in (t^1_j, t^2_j); \;\; \lambda\widetilde{g}'(t) > 0, \, t \in (t^1_j, t^2_j). \tag{4.6}$$

Знову використовуючи пропозицію 5.6.6 із [3], робимо висновок, що

$$t_{\max} - t^1_j \geq t^1_{\max} - t_j$$

і

$$t^2_j - t_{\max} \geq t^0_j - t^1_{\max}$$

і значить,

$$t^2_j - t^1_j \geq t^0_j - t_j,$$

звідки

$$mes\{[t_{j+1}, t_j] \setminus (t^2_j, t^1_j)\} \leq mes\{[t^0_j, t_{j+1}]\}. \tag{4.7}$$

В силу пропозиції 5.6.5 із [3] з урахуванням того, що

$$\lambda\widetilde{g}'(t) \geq \widetilde{\varphi}'(t + t^1_{\max} - t_{\max}), \quad t \in \left(t_{\max} - (t^1_{\max} - t_j), t_{\max} + (t^0_j - t^1_{\max})\right), \tag{4.8}$$

встановлюємо, що

$$\int\limits_{t^1_j}^{t^2_j} \lambda\widetilde{g}'(t)\, dt \geq \int\limits_{t_j}^{t^0_j} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt = \left| \int\limits_{t^0_j}^{t_{j+1}} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt \right|, \tag{4.9}$$

і оскільки $\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \lambda\widetilde{g}'(t)\, dt = 0$, то

$$\left| \int\limits_{[t_j, t_{j+1}] \setminus (t^1_j, t^2_j)} \lambda\widetilde{g}'(t)\, dt \right| \geq \int\limits_{t_j}^{t^0_j} \widetilde{\varphi}'(t), dt. \tag{4.10}$$

З іншого боку (тут ми знову використовуєм (4.5) і пропозицію 5.6.5 із [3]) для $t \in (t_j, t_j^1) \cup (t_j^2, t_{j+1})$ отримуємо $|\lambda \widetilde{g}'(t)| \le |\widetilde{\varphi}'(t)|$. Враховуючи цю нерівність і (4.7), дістаємо, що

$$\left| \int\limits_{[t_j,t_{j+1}]\setminus(t_j^1,t_j^2)} \lambda \widetilde{g}'(t)\, dt \right| \le \int\limits_{[t_j,t_{j+1}]\setminus(t_j^1,t_j^2)} |\widetilde{\varphi}'(t)|\, dt \le \int\limits_{t_j^0}^{t_{j+1}} |\widetilde{\varphi}'(t)|, dt = \int\limits_{t_j}^{t_j^0} \widetilde{\varphi}'(t), dt. \quad (4.11)$$

Зіставляючи (4.10) і (4.11), бачимо, що

$$\left| \int\limits_{[t_j,t_{j+1}]\setminus(t_j^1,t_j^2)} \lambda \widetilde{g}'(t)\, dt \right| = \int\limits_{t_j}^{t_j^0} \widetilde{\varphi}'(t), dt,$$

але тоді і

$$\int\limits_{t_j^1}^{t_j^2} \lambda \widetilde{g}'(t)\, dt = \int\limits_{t_j}^{t_j^0} \widetilde{\varphi}'(t), dt. \quad (4.12)$$

Пригадуючи, що $\lambda \widetilde{g}'(t) \ge \widetilde{\varphi}'(t + t_{\max}^1 - t_{\max})$ для всіх $t \in [t_{\max} - (t_{\max}^1 - t_j), t_{\max} + (t_{\max}^0 - t_{\max}^1)]$, бачимо, що рівність (4.12) може виконуватись лише у випадку $\lambda \widetilde{g}'(t) = \widetilde{\varphi}'(t + t_{\max}^1 - t_{\max})$ для всіх $t \in [t_{\max} - (t_{\max}^1 - t_j), t_{\max} + (t_{\max}^0 - t_{\max}^1)]$, але це неможливо, оскільки $|\lambda g_0(t)| < 1$ для майже всіх t.

Таким чином, ми довели справедливість нерівності

$$\|g'_\pm\|_\infty \le \|(B_{l-1} * K(-\cdot)\varphi_{n,0})_\pm\|_\infty. \quad (4.13)$$

Із (4.13), застосовуючи лему 2 і теорему 6.1 із [18], отримаємо, що

$$\|g''_\pm\|_\infty \le \|(B_{l-2} * K(-\cdot)\varphi_{n,0})_\pm\|_\infty.$$

Далі, користуючись індукцією, отримаємо

$$\|g_\pm^{(k)}\|_\infty \le \|(B_{l-k} * K(-\cdot)\varphi_{n,0})_\pm\|_\infty, \quad k = 1, 2, ..., l.$$

Теорему доведено.

Доведення теореми 1. Використовуючи теорему двоїстості С.М. Нікольського [23] для найкращого L_1–наближення підпростором (див. також [5, теорема 1.4.1]), отримаємо

$$E := E(K * F, K * S_{2n,k}^2)_1 = \sup_{f \in K*F} \sup_{\substack{\|g\|_\infty \le 1,\\ g \perp K*S_{2n,k}^2}} \int\limits_0^{2\pi} f(t) g(t)\, dt =$$

$$= \sup_{\substack{f_0\in F,\\ f_0\perp\mu}} \sup_{\substack{\|g\|_\infty\le 1,\\ g\perp K*S^2_{2n,k}}} \int\limits_0^{2\pi} (K*f_0)(t)g(t)\,dt.$$

З використанням леми 1 можемо написати

$$E = \sup_{\substack{f_0\in F,\\ f_0\perp\mu}} \sup_{\substack{\|g\|_\infty\le 1,\\ K*g_{k+1}(t_1)=...=K*g_{k+1}(t_n),\\ (K*g_{k+1})'(t_1)=...=(K*g_{k+1})'(t_n)=0}} \int\limits_0^{2\pi} f_0(t)K(-\cdot)*g(t)\,dt,$$

де $t_j = 2j\pi/n$, $j = 1, 2, ..., n$, g_{k+1} – $(r+1)$-а 2π-періодична первісна функції g.

Враховуючи пропозицію 1.3.4 із [24], остаточно маємо

$$E = \sup_{\substack{\|g\|_\infty\le 1,\\ K*g_{k+1}(t_1)=...=K*g_{k+1}(t_n),\\ (K*g_{k+1})'(t_1)=...=(K*g_{k+1})'(t_n)=0}} \sup_{\substack{f\in F,\\ f\perp\mu}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(K(-\cdot)g,t)\,dt. \tag{4.14}$$

Використовуючи твердження b) теореми 2 при $l = k$, отримаємо $\|(K(-\cdot) * g_1)_\pm\|_\infty \le \|(K(-\cdot)*\varphi_{n,1})_\pm\|_\infty$. Отже, виконуються умови теореми 6.2 із [18], в силу якої має місце нерівність

$$\int\limits_0^t r((K(-\cdot)*g(t)-\lambda)_\pm,u)\,du \le \int\limits_0^t r((K(-\cdot)*\varphi_{n,0}(t)-\lambda)_\pm,u)\,du, \qquad 0\le t\le 2\pi. \tag{4.15}$$

для всіх $\lambda\in\mathbb{R}$ и $t\in[0,2\pi]$. Використовуючи пропозицію 1.3.14 із [24], можемо написати

$$\int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(K(-\cdot)*g,t)\,dt \le \int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(K(-\cdot)*\varphi_{n,0},t)\,dt.$$

Із (4.14) і останньої нерівності одразу випливає оцінка зверху для E:

$$E \le \sup_{\substack{f\in F,\\ f\perp\mu}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(K(-\cdot)*\varphi_{n,0},t)\,dt.$$

Оцінка знизу очевидно випливає із нерівності

$$d_{2n}(K*F, L_1) \le E(K*F, K*S^2_{2n,k})_1$$

і співвідношення (2.5).

Отже, співввідношення (3.1) доведене. Що стосується співвідношення (3.2), то воно випливає із рівності

$$\sup_{\substack{f\in F,\\ f\perp\mu}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(K(-\cdot)*\varphi_{n,0},t)\,dt = \|K(-\cdot)*\varphi_{n,0}\|_{p'}.$$

Теорему доведено.

Бібліографічні посилання

1. *Mairhuber J. C.* On variation diminishing transformations on the circle /J. C. Mairhuber, I. J. Schonberg, R. E. Williamson // Rend. Circ. Math. Palermo. —1959. — Vol. 8, № 2. — C. 241–270.
2. *Karlin S.* Total positivity.Vol. I. /S. Karlin.– Stanford, Calif. : Stanford Univ. Press., 1968. — 576 c.
3. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения /Н. П. Корнейчук.– М. : Наука, 1976. — 320 с.
4. *Корнейчук Н. П.* Аппроксимация с ограничениями /Н. П. Корнейчук, А. А. Лигун, В. Г. Доронин – К. : Наук. думка, 1982. — 252 с.
5. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения /Н. П. Корнейчук.– М. : Наука, 1987. — 424 с.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем /С. М. Никольский // Изв. АН СССР, Сер. мат. Математика. —1946. — Vol. 10, № 3. — С. 207–256.
7. *Тайков Л. В.* О приближении в среднем некоторых классов аналитических функций /Л. В. Тайков // Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1967. — Т. 88. — С. 61–70.
8. *Туровец С. П.* О наилучшем приближении в среднем дифференцируемых функций / С. П. Туровец // ДАН УССР, Сер. А. — 1968. —Т. 5. — С. 417–421.
9. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bounds of functions/A. A. Ligun // Analysis Math.— 1976. —Vol. 2,№ 1 — P. 11–40.
10. *Маковоз Ю. И.* Поперечники некоторых функциональных классов в пространстве L/ Ю. И. Маковоз// Изв. АН БССР, Сер. физ.-матем. — 1969. —Т. 4. — С. 19–28.
11. *Субботин Ю. Н.* Поперечник класса W^rL в $L(0, 2\pi)$ и приближение сплайн-функциями /Ю. Н. Субботин // Мат. заметки. —1970. — Т. 7, вып. 1. — С. 43–52.
12. *Субботин Ю. Н.* Приближение сплайн-функциями и оценки поперечников /Ю. Н. Субботин //Труды МИАН. —1971. — Т. 109. — С. 35–60.
13. *Маковоз Ю. И.* Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховых пространствах /Ю. И. Маковоз // Мат. заметки. —1972. — Т. 87, вып. 1. — С. 136–142.
14. *Лигун А. А.* О поперечниках некоторых классов дифференцируемых периодических функций /А. А. Лигун // Мат. заметки. —1980. — Т. 27, вып. 1. — С. 61–75.
15. *Маковоз Ю. И.* Поперечники соболевских классов и сплайны, наименее уклоняющиеся от нуля /Ю. И. Маковоз // Мат. заметки. —1979. — Т. 26, вып. 5. — С. 805–812.
16. *Pinkus A.* On n-widths of periodic functions /A. Pinkus//J. Anal. Math. —1979. — Vol. 13. — P. 209–235.
17. *Babenko V. F.* Approximations, widths and optimal quadrature formulae for classes of periodic functions with rearrangement invariant sets of derivatives/V.F. Babenko // Analysis Mathematica. — 1987. — Vol. 13. — P. 281–306.
18. *Бабенко В. Ф.* Приближение классов сверток /В. Ф. Бабенко //Сибирский математический журнал. — 1987. — Т. 26. — С. 6–21.

19. *Pinkus A.* n-Width in Approximation Theory /A. Pinkus. —Berlin, Heidelberg. : New York: Tokio: Springer Verlag, 1985. — 294 p.
20. *Бабенко В. Ф.* Экстремальные задачи теории приближения и несимметричные нормы / В. Ф. Бабенко. —дисс...д. ф.-м.н. : Днепропетровск, ДГУ, 1987. — 275 с.
21. *Бабенко В. Ф.* Точные значения наилучших приближений классов периодических функций сплайнами дефекта 2 /В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Мат. заметки. — 2009. — Т. 85, вып. 4. — С. 538–551.
22. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функций на бесконечном интервале /А. Н. Колмогоров // Ученые заметки МГУ, Математика. —1939. — Т. 30, № 3. — С. 3–13.
23. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем /С. М. Никольский //Изв. АН СССР. Сер. мат. —1946. — Т. 10, №. 3. — С. 207–256.
24. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов /Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун. — К. : Наукова думка, 1992. — 304 с.

Надійшла до редколегії 14.03.2017